MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA

VOL. IX. NÚM. 1

ESTUDIOS SOBRE LOS HILOS

POR

E. TERRADAS

OBRA PREMIADA

POR ESTA REAL ACADEMIA CON MOTIVO DEL PREMIO AGELL (1905-1907)

TOMO I

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE HILOS INELÁSTICOS

Publicado en 1911

BARCELONA

A. LÓPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1911

As
302
B36
época 3
t.9
no.1

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA

TERCERA ÉPOCA

VOL. IX. NÚM. 1

ESTUDIOS SOBRE LOS HILOS

POR

E. TERRADAS

OBRA PREMIADA

POR ESTA REAL ACADEMIA CON MOTIVO DEL PREMIO AGELL (1905-1907)

TOMO I

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE HILOS INELÁSTICOS

Publicado en 1911

BARCELONA

A. LOPEZ ROBERT, IMPRESOR. — CONDE DEL ASALTO, 63

1911

PRÓLOGO

La materia contenida en este tomo se halla dividida en dos partes principales. La primera trata del equilibrio de hilos flexibles inelásticos, la segunda de su movimiento. Esta última contiene estudios más originales que la primera, la cual no formaba parte de la memoria premiada y fué escrita á ruegos de la comisión que otorgó el Premio Agell en 1907.

DEL EQUILIBRIO

DE LOS

HILOS INELÁSTICOS

I.—Introducción

Un hilo es un cuerpo cuya longitud es muy grande comparada con su sección. En general, para doblarlo, será necesario efectuar cierto trabajo venciendo la resistencia de fuerzas especiales interiores que se oponen á la flexión. Se dirá en este caso que el hilo es elástico y flexible. Sucederá también, en general, que sometido el hilo á dos fuerzas convenientes iguales y contrarias aplicadas á sus extremos, aumentará su longitud, en cuyo caso se dice del hilo que es elásticamente alargable Por fin, para torcerlo se necesitaría efectuar cierto trabajo; es que el hilo presenta elasticidad de torsión. Los cuerpos naturales que se llaman vulgarmente hilos presentan á la vez las tres propiedades mencionadas. No hay dificultad, sin embargo, en concebir hilos flexibles pero inelásticos, los cuales, si bien no los da la naturaleza ni los obtiene la industria, algunos, y aun muchos, presenta aquélla y obtiene ésta con un grado extraordinario de flexibilidad y sin elasticidad apenas.

II.—Planteo de las ecuaciones de equilibrio en la forma ordinaria.

Sean:

σ la sección normal del hilo en un punto;

ds el elemento longitudinal de arco;

ρ la densidad;

$X\ Y\ Z$ las componentes sobre tres ejes coordenados rectangulares de la fuerza exterior por unidad de masa.

Supóngase al hilo roto por uno de sus puntos. Si se quiere mantener el equilibrio y conservar la forma primitiva, es necesario aplicar dos fuerzas iguales y contrarias en los dos cabos sueltos.

Sea T el valor absoluto de estas fuerzas, y α, β y γ los cosenos de los ángulos que su dirección forma con los ejes coordenados. Llámase á T "tensión", y se considera como positiva cuando su proyección sobre la tangente á la curva tiene el sentido positivo de los arcos.

El elemento $\sigma\rho\ ds$ limitado por dos secciones normales en los puntos A y B se halla sometido á la acción de las siguientes fuerzas:

1.° La exterior cuyas componentes son $X\sigma\rho\ ds$, $Y\sigma\rho\ ds$ y $Z\sigma\rho\ ds$,

2.° La tensión en A, igual—T, y cuyas componentes son $-T\alpha$, $-T\beta$ y $-T\gamma$.

3.° La tensión en B igual á $T+\frac{dT}{ds}ds$, y cuyas componentes son iguales al valor anterior multiplicado por $\alpha+\frac{d\alpha}{ds}ds$, $\beta+\frac{d\beta}{ds}ds$, y $\gamma+\frac{d\gamma}{ds}ds$.

En consecuencia, expresando que las fuerzas que obran sobre el elemento están en equilibrio, se tienen las tres ecuaciones de proyección (*)

$$\left[T+\frac{dT}{ds}ds\right]\left[\alpha+\frac{d\alpha}{ds}ds\right]-T\alpha+X\rho\sigma ds=o$$

$$\left[T+\frac{dT}{ds}ds\right]\left[\beta+\frac{d\beta}{ds}ds\right]-T\beta+Y\rho\sigma ds=o$$

$$\left[T+\frac{dT}{ds}ds\right]\left[\gamma+\frac{d\gamma}{ds}ds\right]-T\gamma+Z\rho\sigma ds=o$$

y las tres de momentos que siguen, en las que x, y, y z son las coordenadas de A; $x+dx$, $y+dy$, y $z+dz$ las de B.

$$\left[T+\frac{dT}{ds}ds\right]\left[\gamma+\frac{d\gamma}{ds}ds\right]\left[y+dy\right]-\left[T+\frac{dT}{ds}ds\right]\left[\beta+\frac{d\beta}{ds}ds\right]\left[z+dz\right]$$
$$-\left[T\gamma y-T\beta z\right]+\sigma\rho\left[Z\left[y+\frac{dy}{2}\right]-Y\left[z+\frac{dz}{2}\right]\right]ds=o$$

$$\left(T+\frac{dT}{ds}ds\right)\left[\alpha+\frac{d\alpha}{ds}ds\right]z+dz\Big]-\left[T+\frac{dT}{ds}ds\right]\left[\gamma+\frac{d\gamma}{ds}ds\right]\left(x+dx\right)$$
$$-\left[T\alpha z-T\gamma x\right]+\sigma\rho\left[X\left[z+\frac{dz}{2}\right]-Z\left[+x\frac{dx}{2}\right]\right]ds=o$$

(*) Fuss. Nova Acta Petropolitanae 1796.

$$\left[T+\frac{dT}{ds}ds\right]\left[\beta+\frac{d\beta}{ds}ds\right]\left[x+dx\right]-\left[T+\frac{dT}{ds}ds\right]\left[\alpha+\frac{d\alpha}{ds}ds\right]\left[y+dy\right]$$

$$-\left[T\beta x-T\alpha y\right]+\rho\sigma\left[Y\left(x+\frac{dx}{2}\right)-X\left(y+\frac{dy}{2}\right)\right]ds=o$$

cuyas seis ecuaciones quedándonos con los términos de primer orden en ds se reducen á

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[T\alpha\right]+\rho\sigma X&=o\\ \frac{d}{ds}\left[T\beta\right]+\rho\sigma Y&=o\\ \frac{d}{ds}\left[T\gamma\right]+\rho\sigma Z&=o\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

y

$$\frac{dx}{\alpha}=\frac{dy}{\beta}=\frac{dz}{\gamma}=ds\qquad(2)$$

Las últimas expresan que la dirección de la tensión es la de la tangente á la curva (*). En virtud de esta propiedad las ecuaciones (1) se podrán escribir como sigue:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[T\frac{dx}{ds}\right]+\rho\sigma X&=o\\ \frac{d}{ds}\left[T\frac{dy}{ds}\right]+\rho\sigma Y&=o\\ \frac{d}{ds}\left[T\frac{dz}{ds}\right]+\rho\sigma Z&=o\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

(*) Esta propiedad puede deducirse también, tomando momentos no ya respecto de tres ejes cualesquiera, sino respecto de una recta que pase por A y no sea tangente á la curva de equilibrio en este punto. El momento de las fuerzas exteriores es de segundo orden en ds y por tanto también lo será el de la tensión en B, respecto de aquella recta. Lo que quiere decir que la dirección de la tensión en B es la de la tangente.

III.—Forma intrínseca de las ecuaciones de equilibrio.

Si en las acuaciones (3) se efectúa la derivación de los productos $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, y $T\frac{dz}{ds}$ se obtienen las tres siguientes,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds}\,\frac{dT}{ds} + T\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) &= -\rho\sigma X \\ \frac{dy}{ds}\,\frac{dT}{ds} + T\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) &= -\rho\sigma Y \\ \frac{dz}{ds}\,\frac{dT}{ds} + T\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right) &= -\rho\sigma Z \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Recordando que, si $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ son los ángulos que la normal forma con los ejes y $\overline{\rho}$ es el radio de curvatura.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\cos\alpha'}{\overline{\rho}}\ ,\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\cos\beta'}{\overline{\rho}}\ ,\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\cos\gamma'}{\overline{\rho}}$$

Las fórmulas 4 pueden transformarse, á saber:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds}\,\frac{dT}{ds} + \frac{T}{\overline{\rho}}\cos\alpha' &= -\rho\sigma X \\ \frac{dy}{ds}\,\frac{dT}{ds} + \frac{T}{\overline{\rho}}\cos\beta' &= -\rho\sigma Y \\ \frac{dz}{ds}\,\frac{dT}{ds} + \frac{T}{\overline{\rho}}\cos\gamma' &= -\rho\sigma Z \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{ bis})$$

y en esta forma, multiplicándolas por $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ y $\frac{dz}{ds}$ respectivamente, y recordando que la normal principal es perpendicular á la tangente, se obtiene

$$\frac{dT}{ds} = -\sigma\rho\left[X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right] \qquad (5)$$

El segundo miembro de esta expresión representa la proyección sobre la tangente de las fuerzas exteriores por unidad de longitud. Llamándola $\mathfrak{T}$, se tendrá

$$\frac{dT}{ds} + \mathfrak{T} = o \qquad (5\text{ bis})$$

que es la primera de las ecuaciones denominadas intrínsecas.

Multiplicando las ecuaciones 4 bis por $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$ y $\cos \gamma'$ respectivamente y sumándolas, se tiene

$$\frac{T}{\rho} = -\rho\sigma \left[X \cos \alpha' + Y \cos \beta' + Z \cos \gamma' \right]$$

ó bien, llamando $\mathfrak{M}$ á la componente de la fuerza exterior por unidad de longitud, según la normal principal,

$$\frac{T}{\rho} = -\mathfrak{M} \qquad (6 \text{ bis})$$

que es la segunda de las ecuaciones intrínsecas.

Si se proyectaran las tensiones y la fuerza exterior sobre la binormal á la curva, se hallaría una expresión $o=o$, ya que la tensión tiene la dirección de la tangente y la fuerza exterior debiendo ser equilibrada por las tensiones se halla en el plano osculador.

IV. —Propiedades que se deducen de las ecuaciones de equilibrio.

Las ecuaciones de la curva de equilibrio se obtendrán eliminando T y $\frac{dT}{ds}$ en las ecuaciones 4. Resulta:

$$\frac{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ Y & Z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) & \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ Z & X \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right) & \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ X & Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) & \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) \end{vmatrix}} = -\frac{T}{\sigma\rho}$$

También puede eliminarse la T multiplicando las ecuaciones 4 por ds, é integrando entre s_o y s. Si C_1, C_2 y C_3 son tres constantes arbitrarias, se tendrá:

$$\frac{C_1 + \int_{so}^{s} X\,\sigma\rho\,ds}{\frac{dx}{ds}} = \frac{C_2 + \int_{so}^{s} Y\,\sigma\rho\,ds}{\frac{dy}{ds}} = \frac{C_3 + \int_{so}^{s} Z\,\sigma\rho\,ds}{\frac{dz}{ds}} = -T \qquad (7)$$

De la igualdad (5) se deduce, multiplicando por ds ambos miembros é integrando,

$$\int dT = \int - \sigma\rho\left(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\right) \qquad (8)$$

Si las fuerzas exteriores por unidad de longitud derivan de una función de fuerzas U, función de x, y, y z, se podría escribir

$$\int dT = -\int dU$$

ó sea

$$T - T_o = U_o - U \qquad (9)$$

En un trozo de hilo comprendido entre dos puntos cualesquiera, hay equilibrio entre las tensiones en estos puntos extremos y las fuerzas exteriores en toda la longitud comprendida entre los mismos, por manera que las condiciones de equilibrio son las mismas que si el trozo considerado fuera rigido. Llámase á esta propiedad principio de la rigidez, y puede deducirse de las ecuaciones (7) en cuanto éstas expresan las tres ecuaciones de proyección para el trozo de hilo comprendido entre s_o y s, considerado como un sólido rígido. Las de momentos pueden deducirse también de un modo sencillo de las ecuaciones fundamentales.

Una consecuencia que se deduce de las fórmulas (3) es la siguiente (*): Si la fuerza exterior pertenece á un complejo lineal, el momento de la tensión respecto al mismo es constante. En particular, si es perpendicular á un eje, la proyección de la tensión sobre el mismo es constante, y si es complanaria con un eje el momento de la tensión respecto al mismo es constante.

V.—Integración de las ecuaciones del equilibrio.

En el caso más general, X, Y, Z, σ y ρ pueden ser funciones de x, y, z, s $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ y $\frac{dz}{ds}$, esto es, funciones de la posición del elemento ds. Las tres ecuaciones (3) más la siguiente condición geométrica

(*) Penachietti. Rendiconti de Cércolo mathematico di Palermo, t. VI.

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \qquad (10)$$

constituyen un sistema de 4 ecuaciones para determinar en función de s á x, y, z, y T, apareciendo en las integrales seis constantes arbitrarias, que podrán determinarse, por ejemplo, expresando que en ciertos puntos del hilo se cumplen determinadas condiciones.

Así por ejemplo, los extremos de un hilo de longitud dada l se hallan sobre dos {curvas / superficies} rugosas cuyas ecuaciones son:

$x = f_1(u)$	$x = f_4(u)$	$x = F_1(v, v')$	$x = F_4(v, v')$
$y = f_2(u)$	$y = f_5(u)$	$y = F_2(v, v')$	$y = F_5(v, v')$
$z = f_3(u)$	$z = f_6(u)$	$z = F_3(v, v')$	$z = F_6(v, v')$

pudiendo deslizar á lo largo de las mismas pero sometidos á un rozamiento definido por la tangente del ángulo de rozamiento que se designará por f. Se piden las posiciones del hilo en las que la tensión en los extremos forma el ángulo mínimo con la curva ó superficie en el punto correspondiente.

La condición anterior equivale á la de formar la tangente al hilo en cada extremo con {la tangente / el plano tangente} á la {curva / superficie} límite que por él pasa un ángulo α definido por

$$\alpha = arc.\, tg.\, f.$$

Si las ecuaciones de equilibrio de un hilo son

$$x = \varphi_1(s, C_1 \cdots C_6)$$

$$y = \varphi_2(s, C_1 \cdots C_6)$$

$$z = \varphi_3(s, C_1 \cdots C_6)$$

$$T = \varphi_4(s, C_1 \cdots C_6)$$

se tendrán para determinar las constantes las siguientes condiciones:

$s = o$

$$\varphi_1(o, C_1 \cdots C_6) = f_1(u_o)$$
$$\varphi_2(o, C_1 \cdots C_6) = f_2(u_o)$$
$$\varphi_3(o, C_1 \cdots C_6) = f_3(u_o)$$

$$\left(\frac{df_1}{du}\right)_o \left(\frac{d\varphi_1}{ds}\right)_o +$$

$$\left(\frac{df_2}{du}\right)_o \left(\frac{d\varphi_2}{ds}\right)_o +$$

$$\left(\frac{df_3}{du}\right)_o \left(\frac{d\varphi_3}{ds}\right)_o =$$

$$\cos\alpha \sqrt{\left(\frac{df_1}{du}\right)_o^2 + \left(\frac{df_2}{du}\right)_o^2 + \left(\frac{df_3}{du}\right)_o^2}$$

y para $s = l$ ecuaciones análogas.

Se tienen así 8 ecuaciones para determinar las 6 constantes C además de u_o y u_l. Si las curvas límites fueran lisas en vez de ser rugosas, debería hacerse $\alpha = 90°$ en las fórmulas anteriores.

$s = o$

$$\varphi_1(o, C_1 \cdots C_6) = F_1(v_o, v'_o)$$
$$\varphi_2(o, C_1 \cdots C_6) = F_2(v_o, v'_o)$$
$$\varphi_3(o, C_1 \cdots C_6) = F_3(v_o, v'_o)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \\ \frac{\partial F_3}{\partial v'} & \frac{\partial F_2}{\partial v'} \end{vmatrix}_o \left(\frac{d\varphi_1}{ds}\right)_o +$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial v} \\ \frac{\partial F_1}{\partial v'} & \frac{\partial F_3}{\partial v'} \end{vmatrix}_o \left(\frac{d\varphi_2}{ds}\right)_o +$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v'} & \frac{\partial F_1}{\partial v'} \end{vmatrix}_o \left(\frac{d\varphi_3}{ds}\right)_o =$$

$$\operatorname{sen}\alpha \sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}\right)_o^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial v}\right)_o^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial v}\right)_o^2}$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial v'}\right)_o^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial v'}\right)_o^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial v'}\right)_o^2}$$

y para $s = l$ ecuaciones análogas.

Se tienen así 8 ecuaciones para determinar las 6 constantes C, y dos de las constantes v_o, v'_o, v_l y v'_l quedando otras dos para cuya determinación son necesarias dos nuevas condiciones.

Si las superficies extremas fueren lisas, las tangentes al hilo en sus cabos deberán tener la dirección de las normales á las citadas superficies en los puntos correspondientes, y las ecuaciones de condición son, en este caso, para $s = o$.

$$\varphi_1 (s, C_1 \cdots C_6) = F_1 (v_o, v'_o)$$

$$\varphi_2 (s, C_1 \cdots C_6) = F_2 (v_o, v'_o)$$

$$\varphi_3 (s, C_1 \cdots C_6) = F_3 (v_o, v'_o)$$

$$\frac{\left(\frac{d\varphi_1}{ds}\right)_o}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \\ \frac{\partial F_3}{\partial v'} & \frac{\partial F_2}{\partial v'} \end{vmatrix}_o} = \frac{\left(\frac{d\varphi_2}{ds}\right)_o}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial v} \\ \frac{\partial F_1}{\partial v'} & \frac{\partial F_3}{\partial v'} \end{vmatrix}_o} = \frac{\left(\frac{d\varphi_3}{ds}\right)_o}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v'} & \frac{\partial F_1}{\partial v'} \end{vmatrix}_o}$$

y otras 5 análogas para $s=l$. Resultan así 10 ecuaciones para determinar las seis constantes $C_1 \cdots C_6$ y las cuatro que fijan las posiciones de los extremos en las superficies dadas.

Si X, Y, Z, σ y ρ no dependen de s, el número de constantes arbitrarias en la integración de las ecuaciones (3) se reduce á 5.

VI.—Ecuaciones de equilibrio de un hilo dispuesto en una superficie lisa. Forma ordinaria.

A un hilo dispuesto en una superficie lisa se le puede considerar como libre, á condición de añadir á las fuerzas exteriores la reacción de la superficie, normal á la misma. Sea $f(x, y, z)=o$ la ecuación de la superficie y N el valor de la reacción normal por unidad de longitud. Se tendrá

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \sigma\rho X + \sigma\rho N \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = o$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \sigma\rho Y + \sigma\rho N \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = o$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dz}{ds}\right) + \sigma\rho\, Z + \sigma\rho\, N\,\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = o$$

cuyas ecuaciones, junto con las dos siguientes:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

$$f(x\ y\ z) = o$$

constituyen un sistema de 5 ecuaciones, con las cuales se podrán determinar x y, z, T y N en función de s.

Si la ecuación de la superficie fuese dada en la forma:

$$x = F_1(v, v'), \qquad y = F_2(v, v'), \qquad z = F_3(v, v')$$

se podrán determinar v, v', N y T en función de s, por las siguientes ecuaciones en número de cuatro:

$$\frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dF_1}{ds}\right) + \sigma\rho\, X + \sigma\rho\, N \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial v} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial v'} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v'} \end{vmatrix} (PQ)^{-1/2} = o$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dF_2}{ds}\right) + \sigma\rho\, Y + \sigma\rho\, N \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial v} & \dfrac{\partial F_3}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial v'} & \dfrac{\partial F_3}{\partial v'} \end{vmatrix} (PQ)^{-1/2} = o$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\,\frac{dF_3}{ds}\right) + \sigma\rho\, Z + \sigma\rho\, N \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial v} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial v'} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v'} \end{vmatrix} (PQ)^{-1/2} = o$$

$$ds^2 = P\,dv^2 + 2\,R\,dv\,dv' + Q\,dv'^2$$

en cuya expresión P, Q y R son los llamados parámetros lineales, cuyo valor viene dado por las expresiones siguientes:

$$P = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial v}\right)^2$$

$$Q = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial v'}\right)^2$$

$$R = \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial v'} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial v'} + \frac{\partial F_3}{\partial v}\frac{\partial F_3}{\partial v'}$$

Si las curvas $v = Cons.$ $v' =$ Const. son ortogonales, $R = o$.

VII.—Ecuaciones de equilibrio de un hilo en una superficie lisa.

Forma intrínseca.

Las ecuaciones anteriores dejan arbitrario el sistema de ejes de referencia. Los dos sistemas otogonales más apropiados, son:

1.º El constituído por la tangente al hilo, la normal á la superficie en el mismo punto y una recta perpendicular á las dos anteriores.

2.º El constituído por la tangente, la normal principal y la binormal á la curva en un punto.

En el primer sistema de ejes, obran según la tangente la diferencia de tensiones en los extremos $\frac{dT}{ds}\,ds$ y la componente $\mathfrak{T}\,ds$ de la fuerza exterior según la tangente; luego:

$$\frac{dT}{ds} + \mathfrak{T} = o \qquad (11)$$

Según la normal á la superficie obra la reacción normal N, la componente de las fuerzas exteriores según la misma que por unidad de longitud se designará por $\mathfrak{N}_s$ y la componente de la fuerza $\frac{T}{\rho}$ la cual está dirigida según la normal principal á la curva. Llamando θ al ángulo que la normal principal á la curva forma con la normal á la superficie, se tendrá

$$N + \mathfrak{N}_s + \frac{T}{\rho} \cos\theta = o;$$

ó bien, si ρ' es el radio de curvatura de una sección de la superficie que pasando por la tangente al hilo sea normal á la superficie, como quiera que según el teorema de Meûnier

$$\rho' \cos\theta = \overline{\rho} ,$$

la última ecuación se podrá escribir

$$N + \mathfrak{N}_s + \frac{T}{\rho'} = o \qquad (12)$$

Por último, proyectando todas las fuerzas que obran sobre el elemento $\sigma\rho\, ds$ según el último eje, y llamando $\mathfrak{N}'_s$ á la proyección de la fuerza exterior por unidad de longitud, se tendrá

$$\mathfrak{N}_s' + \frac{T}{\rho} \operatorname{sen}\theta = o$$

ó bien, recordando que el radio de curvatura geodésico ρ'' de una curva en una superficie, viene definido por

$$\rho'' = \frac{\overline{\rho}}{\operatorname{sen}\theta} ,$$

$$\mathfrak{N}_s' + \frac{T}{\rho''} = o \qquad (13)$$

Referidas al otro sistema de ejes, las ecuaciones en la forma intrínseca serían

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT}{ds} + \mathfrak{T} = o \\ &N\cos\theta + \mathfrak{N} + \frac{T}{\rho} = o \\ &N\operatorname{sen}\theta + \mathfrak{N}' = o \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

habiendo llamado $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}'$ á las componentes de la fuerza exterior por unidad de longitud según la normal y binormal á la curva respectivamente.

De las ecuaciones de equilibrio de un hilo en una superficie se deduce que, si la fuerza exterior es nula, la tensión es constante y se dispone el hilo según una geodésica, pues la reacción normal ha de equilibrar á las tensiones, y por tanto ha de hallarse en el plano osculador que de ese modo contiene la normal á la superficie.

VIII.—Hilo dispuesto sobre una curva dada. Teorema de Bonnet (*)

De un modo análogo al que se ha seguido para establecer las ecuaciones de equilibrio de un hilo en una superficie se establecerían las de equilibrio de un hilo dispuesto sobre una curva, que puede considerarse como la intersección de dos superficies. Si un hilo libre forma en equilibrio una cierta curva sometido á fuerzas exteriores dadas expresadas por distintas leyes analíticas A, B, C...y luego se realiza materialmente la curva, sometiendo al hilo á una acción

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \cdots$$

siendo α, β γ ··· *etc.* constantes, la reacción normal de la curva estará situada en el plano osculador y será proporcional á su curvatura.

En efecto: sean $A_{\mathfrak{T}}$, $A_{\mathfrak{N}}$ y $A_{\mathfrak{N}'}$ las componentes de A según la tangente, normal y binormal á la curva de equilibrio, y empleemos notaciones análogas para las componentes de B. C., etc. Se tendrá llamando T_A, T_B etc., á los valores de la tensión

$$\frac{dT_A}{ds} = A_{\mathfrak{T}}$$

$$\frac{T_A}{\rho} = A_{\mathfrak{N}}$$

$$A_{\mathfrak{N}'} = o$$

$$\frac{dT_B}{ds} = B_{\mathfrak{T}}$$

$$\frac{T_B}{\rho} = B_{\mathfrak{N}}$$

$$B_{\mathfrak{N}'} = o$$

(*) Appell. Traité de Mécanique Rationelle. Paris 1902.

Si el hilo está dispuesto sobre una curva en las condiciones del enunciado, se tendrá llamando C á la reacción normal

$$\frac{dT}{ds} = \alpha A_{\mathfrak{T}} + \beta B_{\mathfrak{T}} + \cdots$$

$$\frac{T}{\rho} = C_{\mathfrak{N}} + \alpha A_{\mathfrak{N}} + \beta B_{\mathfrak{N}} + \cdots$$

$$O = C_{\mathfrak{B}'} + \alpha A_{\mathfrak{B}'} + \beta B_{\mathfrak{B}'} + \cdots$$

Por lo tanto

$$C_{\mathfrak{B}'} = o$$

$$\frac{dT}{ds} = \alpha \frac{dT_A}{ds} + \beta \frac{dT_B}{ds} + \cdots$$

$$T = \frac{}{\rho} C + \alpha T_A + \beta T_B + \cdots$$

Integrando la segunda de las ecuaciones precedentes y llamando k á la constante de integración.

$$T = \alpha T_A + \beta T_B + \cdots + k$$

con lo cual la tercera se convierte en

$$C = \frac{k}{\rho}$$

Si se dispone convenientemente de k, la reacción normal C puede ser siempre cero, y por lo tanto, un hilo libre que es figura de equilibrio para los sistemas de fuerzas exteriores A, B... lo es también para la fuerza

$$\alpha A + \beta B + \cdots$$

siendo entonces la tensión

$$\alpha T_A + \beta T_B + \cdots$$

IX.—Ecuaciones de equilibrio de un hilo en una superficie rugosa. (*)

Supondremos que se trata de hallar las posiciones límites en que la fuerza de rozamiento alcanza el valor máximo.

Tomando como sistema de ejes el de la tangente, normal á la superficie y recta perpendicular á los anteriores é introduciendo el ángulo γ que la dirección de la fuerza de rozamiento forma con la tangente, y el c eficiente de rozamiento f, se tendrá

$$\mathfrak{T} + \frac{dT}{ds} - f\,N\cos\gamma = o$$

$$\frac{T}{\rho}\cos\theta + N + \mathfrak{N}_s = o$$

$$\frac{T'}{\rho}\,sen\,\theta + \mathfrak{N}'_s - f\,N\,sen\,\gamma = o$$

Para el otro sistema de ejes, se tiene

$$\mathfrak{T} + \frac{dT}{ds} - f\,N\cos\gamma = o$$

$$\frac{T}{\rho} + N\cos\theta + \mathfrak{N}\,(1 + f\,sen\,\theta\cos\gamma) = o$$

$$N\,(sen\,\theta + f\,sen\,\gamma\cos\theta) + \mathfrak{N}' = o$$

Las ecuaciones sobre curva rugosa son análogas á las que se refieren á una curva libre. Así, referidas á la tangente, normal principal y binormal como ejes, llamando N la reacción normal y δ el ángulo que su dirección forma con el plano osculador, se tendrá

$$\mathfrak{T} + \frac{dT}{ds} - f\,N = o$$

$$\frac{T}{\rho} + N\cos\delta + \mathfrak{N} = o$$

$$N\,sen\,\delta + \mathfrak{N}' = o$$

(*) Jellet. Theorie der Reibung. Leipzig, 1890.
August. Archiv der Mathematik und Physik, 1883.

En el caso de que las fuerzas exteriores fueren despreciables comparadas con la tensión, las ecuaciones del equilibrio de un hilo sobre superficie rugosa se simplifican pudiéndose escribir

$$\frac{dT}{ds} - f\,N\cos\gamma = o$$

$$\frac{T}{\rho}\cos\theta + N = o$$

$$\frac{T}{\rho}\,sen\,\theta - f\,N\,sen\,\gamma = o$$

De estas ecuaciones se deduce que

$$tg\,\theta + f\,sen\,\gamma = o \quad ;$$

por lo tanto,

$$tg\,\theta \leq f$$

De modo que es condición de equilibrio el que la normal principal á la curva se halle dentro del cono de rozamiento.

Eliminando γ y N de las ecuaciones simplificadas se deduce

$$\frac{dT}{ds} + \frac{T}{\rho}\cos\theta\left[f^2 - tg^2\,\theta\right]^{1/2} = o$$

é integrando

$$T = e^{C - \int \frac{\cos\theta}{\rho}\left[f^2 - tg^2\,\theta\right]^{1/2} ds}$$

De la relación hallada entre θ, γ y f, se deduce que si $\theta = o$ también $\gamma = o$. Y como si $\theta = o$ la normal á la superficie coincide con la normal principal á la curva y por lo tanto la curva de equilibrio del hilo es una geodésica, se puede decir que: si un hilo se halla dispuesto según una geodésica de una superficie rugosa, en los casos que aquí consideramos, el rozamiento está dirigido según la tangente á la curva. Además, el valor de la tensión es en este caso

$$T = e^{C - f\int \frac{ds}{\rho}}$$

ó sea llamando ν á la curvatura de un arco cuyos extremos están sometidos á las tensiones T_1 y T_2

$$T_1 = T_2 e^{-\nu f}$$

Una aplicación sencilla de este resultado lo constituye el caso de una cuerda dispuesta sobre la sección recta de un cilindro. Si de los extremos de la cuerda penden dos pesos P_1 y P_2 el mayor peso P_1 que podrá ser equilibrado por el menor viene dado por

$$P_1 = P_2 e^{-\pi f}$$

Esta fórmula se aplica á las transmisiones por correas.

Si en vez de estar dispuesta la cuerda según la sección recta lo estuviera según una hélice, y las dos tensiones extremas son P_1 y P_2 siendo $P_1 < P_2$ se tiene

$$log \frac{P_2}{P_1} = f \frac{sen^2 \beta}{r} s$$

en cuya fórmula r es el radio de la sección recta del cilindro β el ángulo que la tangente forma con la generatriz y s el arco de hélice en contacto con el cilindro.

X.—Forma canónica de las ecuaciones del equilibrio de un hilo. (*)

Si las fuerzas exteriores por unidad de longitud derivan de una función de fuerzas U, se podrá escribir

$$\rho\sigma X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \rho\sigma Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \rho\sigma Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

(*) V. Appell. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVI, Clebsch. Journal für reine und Andgewandte Mathematik, t. 57. Marcolongo. Rendiconti delle Academia delle Scienze di Napoli, 1888.

Poniendo:

$$p_1 = T\frac{dx}{ds} \quad , \quad p_2 = T\frac{dy}{ds} \quad , \quad p_3 = T\frac{dz}{ds},$$

se deduce:

$$T^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Sea ahora:

$$H = U + T = U + \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

y las ecuaciones 3 adquirirán las formas que siguen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_1}{ds} &= \frac{-\partial H}{\partial x} \\ \frac{dp_2}{ds} &= \frac{-\partial H}{\partial y} \\ \frac{dp_3}{ds} &= \frac{-\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} (15)$$

las cuales añadidas á las relaciones siguientes que es fácil comprobar

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_3} \end{aligned}\right\} (16)$$

constituyen las características de la ecuación entre derivadas parciales

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial s} + U\right)^2 \qquad (17)$$

de la cual, si se conoce una integral completa (V. la 1.ª nota), se pueden fácilmente hallar las integrales del sistema 15 y 16.

Si h, a y b son tres constantes arbitrarias no aditivas de la integral completa de la ecuación diferencial 17 y designan h' a' y b' tres nuevas constantes, se tiene en efecto,

$$\frac{\partial V}{\partial h} = h' \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial a} = a' \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial b} = b'$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = T\frac{dx}{ds} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = T\frac{dy}{ds} \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = T\frac{dz}{ds} \tag{18}$$

como á integrales de las canónicas 15 y 16.

Si la función U no contiene explícitamente á la variable s, se puede dar á V la forma

$$V = hs + f(x, y, z,)$$

y la primera de las ecuaciones 18 adquiere la siguiente:

$$h' = s + \frac{\partial f}{\partial h}$$

existiendo además la integral

$$U + T = - h$$

Las curvas que en este caso, se obtienen variando las constantes acentuadas son normales á las superficies $f =$ constante (*).

Si el hilo se halla situado en una superficie, usando las notaciones de la segunda parte del párrafo (6) se tiene por ecuación de Jacobi correspondiente,

$$\left(U + \frac{\partial V}{\partial s}\right)^2 \left(QP - R^2\right) = Q\left(\frac{\partial V}{\partial v'}\right)^2 + P\left(\frac{\partial V}{\partial v'}\right)^2 - 2R\,\frac{\partial V}{\partial v'}\,\frac{\partial V}{\partial v'}$$

de la cual, conocida la integral completa con dos constantes h y a no aditivas, se viene en conocimiento de las integrales que representan analíticamente la forma del hilo, á saber

---

(*) V. Appell. Traité de Mécanique Rationnelle.

$$\frac{\partial V}{\partial h} = h' \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial a} = a'$$

siendo h' y a' dos nuevas constantes arbitrarias. El valor de la tensión viene dado por

$$T + U = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Si las curvas v=const., v'=*const.* son ortogonales, y se verifica además que U no contiene á s de un modo explícito, la ecuación de Jacobi toma la forma

$$\left(U + h\right)^2 = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial f}{\partial v'}\right)^2$$

siendo h igual á T+U. Hallada la integral completa de la ecuación de Jacobi con una constante a no aditiva, la forma de la curva se deduce de las dos ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial a} = a' \qquad\qquad s + \frac{\partial f}{\partial h} = h'$$

Si la superficie dada fuere de revolución alrededor del eje de las zedas, por ejemplo, y se emplean coordenadas cilíndricas r, φ y z, se tiene

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2\, d\varphi^2$$

La ecuación de la superficie será de la forma

$$r = F(z).$$

luego

$$ds = dz^2\left(1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right) + F^2\, d\varphi^2$$

y en consecuencia,

$$P = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2$$

$$Q = F^2$$

$$R = 0$$

y la ecuación de Jacobi será

$$\left(U + \frac{\partial V}{\partial s}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2$$

Si U dependiese sólo de r ó de z, se podría escribir

$$\frac{\partial V}{\partial s} = h$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = a$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \sqrt{\left[\left[U + h\right]^2 - \frac{a^2}{F^2}\right]\left[1 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]}$$

é integrando

$$V = hs + a\varphi + \int \sqrt{\left[\left(U+h\right)^2 - \frac{a^2}{F^2}\right]\left[1 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]}\, dz$$

Y las ecuaciones del hilo son

$$s - s_o + \int \frac{\left(U + h\right)\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dr}\right)^2}}{\sqrt{\left(U + h\right)^2 - \frac{a^2}{F^2}}}\, dz = o \qquad (19)$$

$$\varphi - \varphi_o - \int \frac{a\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}{F^2\sqrt{\left(U + h\right)^2 - \frac{a^2}{F^2}}}\, dz = o \qquad (20)$$

La tensión se podrá calcular por la fórmula

$$T = - h - U$$

XI.—De como un hilo en equilibrio realiza la extremal de una cierta integral definida. (*)

El objeto del cálculo de variaciones es determinar una ó varias funciones desconocidas que hagan máximo ó mínimo al valor de una cierta integral definida dependiente de aquéllas. Los problemas del cálculo de variaciones son de índole muy variada (**). En las consideraciones que vamos á exponer en este párrafo, nos limitaremos al caso sencillo en que se trata de determinar las funciones

$$x = f_1(q) \quad , \quad y = f_2(q) \quad , \quad z = f_3(q)$$

que hacen "máximo ó mínimo" al valor de la integral

$$\int F\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$$

siendo F una función analítica de sus variables, y tomada la integral entre ciertos límites, por ejemplo entre x_o, y_o, z_o y x_l, y_l, z_l los cuales puntos extremos podrán ser puntos fijos dados ó sujetos á la condición de hallarse sobre curvas ó superficies dadas. Para ulteriores desarrollos referimos al lector á la nota II del Apéndice, y mejor aún á los Tratados que en la bibliografía que aquélla contiene, se citan.

El problema de que vamos á ocuparnos puede enunciarse del siguiente modo: Entre todas las curvas

$$x = f_1(q) + \varphi_1(q)$$
$$y = f_2(q) + \varphi_2(q)$$
$$z = f_3(q) + \varphi_3(q)$$

tales que las funciones f y φ sean uniformes finitas y continuas entre x_o, y_o, z_o y x_l, y_l, z_l y en que, en cuanto á la función φ, se supone que para todo valor de q comprendido entre q_o y q_l

---

(*) Appell. Traité de Mécanique Rationnelle, tomo I, Paris 1902.

(**) V. Bolza Variationsrechnung, Letpzig, 1909.

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1(q)\\ \varphi_2(q)\\ \varphi_3(q)\end{matrix}\right\} < \varepsilon$$

siendo ε una cantidad tan pequeña como se quiera, hallar la curva

$$x = f_1(q) \quad , \quad y = f_2(q) \quad , \quad z = f_3(q)$$

tal que el valor de la integral

$$\int_{q_o}^{q_l} F\left[f_1(q) , f_2(q) , f_3(q) , \frac{df_1}{ds} , \frac{df_2}{ds} , \frac{df_3}{ds}\right) ds$$

sea menor que el de

$$\int_{q_o}^{q_l} F\Big[f_1(q) + \varphi_1(q) \quad , \quad f_2(q) + \varphi_2(q) \quad , \quad f_3(q) + \varphi_3(q)$$
$$\frac{d(f_1 + \varphi_1)}{ds} \quad , \quad \frac{d(f_2 + \varphi_2)}{ds} \quad , \quad \frac{d(f_3 + \varphi_3)}{ds}\Big) ds$$

Las funciones φ pueden ser de dos clases principales:

Puede ocurrir que para todo valor q comprendido entre q_o y q_l, sea menor que ε no ya solamente el valor de la función φ sino también el de su derivada. Cuando esto ocurre se llama á φ "variación débil". Si la derivada tiene valores finitos cualesquiera se llama á φ "variación fuerte".

Una variación débil es, por ejemplo

$$\varphi(q) = \alpha \chi(q)$$

siendo $\alpha < \varepsilon$ y χ finita así como su derivada en el intervalo $q_o q_l$.

Admitiendo para $\varphi(q)$ la forma anterior de variación débil, la última integral se podrá escribir como sigue, indicando los acentos derivaciones respecto á q.

$$\int_{q_o}^{q_l} F\Big(f_1 + \alpha\chi_1 , f_2 + \alpha\chi_2 , f_3 + \alpha\chi_3 ,$$
$$f_1' + \alpha\chi_1' , f_2' + \alpha\chi_2' , f_3' + \alpha\chi_3'\Big) \times$$
$$\times \sqrt{\left(f_1' + \alpha\chi_1'\right)^2 + \left(f_2' + \alpha\chi_2'\right)^2 + \left(f_3' + \alpha\chi_3'\right)} \quad dq$$

Esta integral es una función de α que ha de ser máxima ó mínima para $\alpha = o$. Desarrollando la cantidad subintegral F_α según las potencias de α se tiene

$$F_\alpha = F\left(f_1, f_2, f_3, f_1', f_2', f_3'\right) +$$

$$\alpha\left[\frac{\partial F}{\partial f_1}\chi_1 + \frac{\partial F}{\partial f_2}\chi_2 + \frac{\partial F}{\partial f_3}\chi_3 + \frac{\partial F}{\partial f_1'}\chi_1' + \frac{\partial F}{\partial f_2'}\chi_2' + \frac{\partial F}{\partial f_3'}\chi_3'\right]$$

$$+ \alpha^2\left[\cdots\right]$$

El desarrollo del radical R_α será como sigue

$$R_\alpha = \sqrt{f'^2_1 + f'^2_2 + f'^3_2}$$

$$+ \alpha\left[\frac{\partial R}{\partial f'_1}\chi'_1 + \frac{\partial R}{\partial f'_2}\chi'_2 + \frac{\partial R}{\partial f'_3}\chi'_3\right] +$$

$$\alpha^2\left[\cdots\right]$$

Por lo tanto

$$F_\alpha R_\alpha = F(f_1 \cdots f'_3)\sqrt{f'^2_1 + f'^2_2 + f'^3_2} +$$

$$\alpha + \left[\frac{\partial R}{\partial f'_1}\chi'_1 + \frac{\partial R}{\partial f'_2}\chi'_2 + \frac{\partial R}{\partial f'_3}\chi'_3\right] + R\left[\frac{\partial F}{\partial f_1}\chi_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f'_3}\chi'_3\right]$$

$$+ \alpha^2\left[\cdots\right]$$

Integrando la expresión anterior después de haberla multiplicado por dq, y teniendo presente que

$$Rdq = ds\,, \quad \frac{\partial R}{\partial f'_1} = \frac{f'_1}{R} = \frac{dx}{ds}\,, \quad \frac{\partial R}{\partial f'_2} = \frac{f'_2}{R} = \frac{dy}{ds}\,; \quad \frac{\partial R}{\partial f'_3} = \frac{f'_3}{R} = \frac{dz}{ds}$$

se tiene:

$$\int_{q_o}^{q_1} F_\alpha R_\alpha\, dq - \int FR\, dq = \alpha\int\left(\left[\chi_1\frac{\partial F}{\partial f_1} + \cdots + \chi'\frac{\partial F}{\partial f'_3}\right]ds\right.$$

$$\left. + F\left(\frac{dx}{ds}\chi'_1 + \frac{dy}{ds}\chi'_2 + \frac{dz}{ds}\chi'_3\right)dq\right) + \alpha^2\int(\cdots)\, dq$$

Integrando por partes expresiones de la forma $\int F \frac{dx}{ds} \chi'_1 \, dq$ se tiene

$$\int F \frac{dx}{ds} \chi'_1 \, dq = \left[F \frac{dx}{ds} \chi_1 \right]_{q_o}^{q_1} - \int \chi_1 \, d \left(F \frac{dx}{ds} \right) dq$$

de modo que se puede escribir

$$\int F_\alpha \, R_\alpha \, dq - \int F R \, dq = \left[F \frac{dx}{ds} \chi_1 + F \frac{dy}{ds} \chi_2 + F \frac{dz}{ds} \chi_3 \right]_{q_o}^{q_1}$$

$$+ \alpha \int \chi_1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} ds - d. \left(F \frac{dx}{ds} \right) - R \frac{\partial F}{\partial f'_1} \right] +$$

$$\chi_2 \left[\frac{\partial F}{dy} ds - d. \left(F \frac{dy}{ds} \right) - R \frac{\partial F}{\partial f'_2} \right] +$$

$$\chi_3 \left[\frac{\partial F}{\partial z} ds - d. \left(F \frac{dz}{ds} \right) - R \frac{\partial F}{\partial f'_3} \right]$$

$$+ \alpha^2 \int [\cdots]$$

Para que el primer miembro tenga un signo constante cualquiera que sea α, es necesario ya que las funciones χ son arbitrarias, que

$$\left[F \frac{dx}{ds} \chi_1 + F \frac{dy}{ds} \chi_2 + F \frac{dz}{ds} \chi_3 \right]_{q_o}^{q_1} = o \qquad (21)$$

y que el coeficiente de α en el segundo miembro sea también nulo, lo cual, dada la arbitrariedad atribuída á las funciones χ sólo puede lograrse si las funciones f_1, f_2 y f_3 son tales que

$$\left.\begin{aligned} d \left(F \frac{dx}{ds} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} ds - R \frac{\partial F}{df'_1} = o \\ d \left(F \frac{dy}{ds} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} ds - R \frac{\partial F}{df'_2} = o \\ d \left(F \frac{dz}{ds} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} ds - R \frac{\partial F}{\partial f'_3} = o \end{aligned}\right\} (22)$$

Llámase á la curva definida por las ecuaciones diferenciales 18 extremal de la integral definida $\int F ds$. Si F es sólo función de x, y, y z las ecuaciones anteriores representan la curva de equilibrio de un hilo sometido á la función de fuerzas $-F$. Luego un hilo en equilibrio es extremal de

$$\int T\, ds$$

siendo T la tensión.

Si los extremos de la curva extremal son dos puntos fijos, las condiciones en los límites expresadas en la ecuación 21 se cumplen, puesto que γ_1, γ_2, y γ_3 son nulas en los extremos. Si éstos estuvieren sujetos á la condición de estar situados en sendas superficies

$$g(x_o, y_o, z_o) = o \quad , \quad g(x_l, y_l, z_l) = o$$

debieran cumplir las variaciones en ellos las dos siguientes condiciones

$$\frac{\partial g}{\partial x_o}\overset{o}{\gamma}_1 + \frac{\partial g}{\partial y_o}\overset{o}{\gamma}_2 + \frac{\partial g}{\partial z_o}\overset{o}{\gamma}_3 = o \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x_l}\overset{l}{\gamma}_1 + \frac{\partial g}{\partial y_l}\overset{l}{\gamma}_2 + \frac{\partial g}{\partial z_l}\overset{l}{\gamma}_3 = o$$

las cuales expresan que las variaciones γ están en el plano tangente, y como las condiciones 21 expresan que ellas son perpendiculares á la curva en sus extremos, se viene á deducir en consecuencia que la extremal en este caso es normal á las dos superficies estremas en los puntos en que las corta.

Análoga propiedad se demostraría para el caso de que los extremos estuvieran sobre curvas fijas.

Volviendo al caso general en que F depende de x, y, z $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ y $\frac{dz}{ds}$ puede ocurrir que se busque la curva que da un valor estacionario á $\int F ds$ con ciertas condiciones, por ejemplo, la de estar situado el hilo en una superficie dada, tener una longitud determinada ú otras parecidas. Para resolver el problema se puede proceder en este caso del siguiente modo. Sea

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{dx}{ds} \ , \ \frac{dy}{ds} \ , \ \frac{dz}{ds}\right) = o$$

la ligadura introducida. Las variaciones γ estarán sujetas á la relación

$$\delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\gamma_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\gamma_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\gamma_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial x}{ds}}\gamma'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial y}{ds}}\gamma'_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial z}{ds}}\gamma'_3 = o \qquad (23)$$

de donde, llamando λ una función de que se podrá disponer luego

$$\int \lambda \delta \varphi \, ds = o$$

Si esta integral se añade á $\delta \int F ds = \int F_\alpha R_\alpha dq - \int F R dq$ se tendrá en el caso de extremos fijos

$$\delta \int F ds + \int \lambda \delta \varphi \, ds = \alpha \int \gamma_1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] ds - d \left[F \frac{dx}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \frac{dx}{ds}} \right] + \gamma_2 \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right] ds - d \left[F \frac{dy}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \frac{dy}{ds}} \right] + \gamma_3 \left[\frac{\partial F}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right] ds - d \left[F \frac{dz}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \frac{dz}{ds}} \right] + \alpha^2 (\dots) = o \quad (24)$$

Las tres funciones γ sujetas á anularse en los extremos, deben satisfacer á la relación 23, así es, que fijadas dos de ellas γ_1 y γ_2 arbitrariamente, la tercera viene dada por 23. Ahora bien, dispongamos de λ de modo que anule el coeficiente de γ_3 de lo cual y de la arbitrariedad de γ_1 y γ_2 se deducen, como á condiciones necesarias del máximo ó mínimo, las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{d}{ds} \left(F \frac{dx}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \frac{dx}{ds}} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{d}{ds} \left(F \frac{dy}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \frac{dy}{ds}} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{d}{ds} \left(F \frac{dz}{ds} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \frac{dz}{ds}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

que con la $\varphi \left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = o$ forman un sistema de cuatro ecuaciones para determinar los valores de x, y, z y λ en función de s.

Si F y φ no dependen de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ ni $\frac{dz}{ds}$ se reducen las ecuaciones 25 á las de equilibrio de un hilo en una superficie φ con la función de fuerzas $-F$ y la reacción normal proporcional á $-\lambda$.

XII.—Cuerda de saltar (*)

Sea una cuerda que gira alrededor de un eje con velocidad angular constante ω, es decir, que está sometida á fuerzas normales al eje y proporcionales á su distancial r al mismo en cada punto. Se supondrá al hilo homogéneo, de sección uniforme, é iguales á la unidad su densidad y sección, y que los extremos del hilo giran con éste. De este modo la forma de la curva no depende del tiempo.

Usando de las notaciones anteriores párrafo X,

$$U = \omega^2 \int r dr = \frac{\omega^2}{2} r^2$$

Esto indica que la curva hace máximo ó mínimo el momento de inercia del hilo respecto del eje de giro.

La ecuación de Jacobi será, empleando coordenadas cilíndricas y poniendo $-\frac{\omega^2}{2} h^2$ en vez de h,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{\omega^2}{2}\left(h^2 - r^2\right)^2$$

siendo la tensión

$$T = \frac{\omega^2}{2}\left[h^2 - r^2\right]$$

(*) Clebsch. Journal für reine und andgewandte Mathematik 1860.
Greenhill. Traité des fonctions elliptiques, trad. Griess, Paris 1895.
Apell et Lacour. Traité des fonctions elliptiques. Paris 1897.
Apell. Traité de Mécanique rationelle, tomo I, Paris 1902.
Müller. Programm Magdeburg; 1875.
Plettenberg, Halle 1882.
Hoppe. Archiv. de Mathematik ù physik, 1883
Marcolongo. Rendiconti di Nápoli, 1892.

Esta última ecuación define el sentido físico de la constante h.

Para resolver la última ecuación entre derivadas parciales, bastará poner:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\omega^2}{2} a$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\omega^2}{2} b$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\omega^2}{2r} \sqrt{r^2 (h^2 - r^2)^2 - a^2 r^2 - b^2}$$

siendo a y b dos constantes, con lo cual

$$V = - h^2 s + az + b\varphi + \int \sqrt{r^2 \left(h^2 - r^2\right)^2 - a^2 r^2 - b^2} \frac{dr}{r}$$

De esta ecuación se deduce inmediatamente una propiedad: La forma del hilo es independiente de la velocidad angular.

Las integrales de las ecuaciones del movimiento son

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\left(h^2 - r^2\right) r dr}{\sqrt{R}} - s &= S_o \\ a \int \frac{r\, dr}{\sqrt{R}} - z &= Z_o \\ b \int \frac{r\, dr}{r^2 \sqrt{R}} - \varphi &= \varphi_o \end{aligned}\right\} (26)$$

siendo

$$R = r^2 (h^2 - r^2)^2 - a^2 r^2 - b^2$$

y s_o, z_o y φ_o tres constantes arbitrarias de integración.

De las ecuaciones 26 se deduce, que la coordenada z viene dada por una integral elíptica de primera especie, el arco s por una de segunda y el ángulo φ por una de tercera.

La ecuación $R=o$ tiene tres raíces en r^2 *reales,* una de las cuales está comprendida entre h^2 é ∞ y las otras dos entre h^2 y cero. Llamando á estas raíces r_1^2, r_2^2 r_3^2 respectivamente,

$$R = (r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2)(r^2 - r_3^2)$$

Supondremos $r_1 > r_2 > r_3 >$

De las relaciones existentes entre los coeficientes y las raíces de una ecuación se viene á deducir

$$h^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{2}$$

$$b^2 = r_1^2 r_2^2 r_3^3$$

$$h^4 - a^2 = r_1^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2$$

$$a^2 = \frac{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2}{4} - (r_1^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2)$$

$$= \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3)\ (r_1 + r_2 - r_3)\ (r_1 - r_2 + r_3)\ (r_1 - r_2 - r_3)$$

De estas relaciones se deduce que para que a, b y h sean reales es necesario que

$$r_1 \geq r_2 + r_3$$

Para la realidad de R es además necesario que esté comprendido z entre r_2 y r_3. Escribiendo

$$r^2 = r_3^2 + (r_2^2 - r_3^2)\, sn^2 u \quad , \quad mod\ k^2 = \frac{r_2^2 - r_3^2}{r_1^2 - r_3^2}$$

las ecuaciones 26 adoptan las siguientes formas

$$\sqrt{r_1^2 - r_3^2}\ (s + s_o) = \int_o^u \left[(h^2 - r_3^2) - (r_2^2 - r_3^2)\, su^2 u \right] du$$

$$\sqrt{r_1^2 - r_3^2}\,\frac{z + z_o}{a} = u$$

$$\sqrt{r_1^2 - r_3^2}\,\frac{\varphi + \varphi_o}{b} = \int_o^u \frac{du}{r_3^2 + (r_2^2 - r_3^2)\,sn^2\,u}$$

O bien, escribiendo

$$r_1^2 - r_2^2 = -\,r_3^2\,k^2\,sn^2\,(ic) \tag{27}$$

en que c es positiva (*), ó lo que es igual y se deduce de lo anterior

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= r_3\,dn\,(ic) \\ r_1 &= r_3\,cn\,(ic)\ , \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

y poniendo además

$$n = \frac{a}{\sqrt{r_1^2 - r_3^2}} = -\frac{r_3\,i}{2}\,\frac{\sqrt{k'^4\,sn^4\,(ic) + 2\,(1 + k^2)\,sn^2\,(ic) - 3}}{sn\,(ic)} \tag{29}$$

siendo k' el módulo complementario, se podrán expresar r_1, r_2 y r_3 en función de n, k y c, con lo cual, la primera y la tercera de las integrales anteriores se podrán escribir

$$\frac{s + s_o}{n} = \frac{(1 - (1 + k^2)\,sn^2\,(ic))\,u + 2\,k^2\,sn^2\,(ic)\int_o^u sn^2\,u\,du}{\sqrt{k'^2\,sn^4\,(ic) + 2\,(1 + k^2)\,sn^2\,(ic) - 3}}$$

(*) Extrayendo la raiz de la última expresión resulta

$$\pm\sqrt{r_1^2 - r_3^2} = i\,r_3\,k\,sn\,(ic)$$

luego $sn\,(ic)$ ha de ser imaginaria pura, para lo cual el argumento ha de ser de la forma ic. V. apéndice. Nota III.

$$\varphi + \varphi_o = i \frac{cn(ic)\, dn(ic)}{sn(ic)} \int_o^u \frac{du}{1 - k^2 sn^2(ic)\, sn^2(u)}$$

Pero

$$\int_o^u k^2 sn^2 u\, du = -\frac{\theta'(u)}{\theta(u)} + u \frac{\theta''(o)}{\theta(o)}$$

y

$$\int \frac{du}{1 - k^2 sn^2(ic)\, sn^2 u} = \int \frac{du\left[1 - k^3 sn^2(ic)\, sn^2(u) + k^2 sn^2(ic)\, sn^2(u)\right]}{1 - k^2 sn^2(ic)\, sn^2(u)} =$$

$$= u + \frac{sn(ic)}{cn(ic)\, dn(ic)} \Pi(u(ic),)$$

siendo Π la función definida en el Apéndice nota III párr. 76. Por lo tanto,

$$\frac{r^2}{n^2} = \frac{-4\, sn^2(ic)}{k'^4 sn^4(ic) + 2(1 + k^2) sn^2(ic) - 3}\left[1 - k^2 sn^2(ic)\, sn^2\left[\frac{z + z_o}{n}\right]\right]$$

$$\varphi + \varphi_o = \frac{i\, cn(ic)\, dn(ic)}{sn(ic)} \frac{z + z_o}{n} + i\, \Pi\left[\frac{z + z_o}{n}, (ic)\right]$$

$$\frac{s + s_o}{n} = \frac{\left(1 - (1 + k^2) sn^2(ic)\right)\frac{z + z_o}{n} + 2\, sn^2(ic)\left[\frac{\theta''(o)}{\theta(o)} \frac{z + z_o}{n} - \frac{\theta'\left(\frac{z + z_o}{n}\right)}{\theta\left(\frac{z + z_o}{n}\right)}\right]}{\sqrt{k'^2 sn^4(ic) + 2(1 + k^2) sn^2(ic) - 3}}$$

Si se dispone el plano de las equis é yes pasando por un punto en el que r es máximo, el radio r función periódica de z no altera con el signo de ésta. Los valores de φ y s cambian de signo con z y constan de una parte periódica y otra proporcional á z. La curva tiene por lo tanto la forma de una espiral. Su proyección sobre el plano de la x y presenta ramas congruentes y alternativamente simétricas cuyos radios límites tienen los valores r_1 y r_3 los cuales son los lados de un ángulo Ω constante.

$$\Omega = i\,K\left\{\frac{cn\,(ic)\,dn\,(ic)}{sn\,(ic)} - \frac{\theta'\,(ic)}{\theta\,(ic)}\right\}$$

Como casos particulares pueden considerarse los siguientes:

1.º $k=o$.

En este caso r=const, $\varphi + \varphi_o$ es proporcional á $z + z_o$ y $\Pi = o$. La curva de equilibrio es una hélice.

2.º $a=o$.

La curva se halla situada en un plano perpendicular al eje de giro

La ecuación (29) permite expresar c en función de k.

Se tiene, en efecto, por ser $a=o$,

$$k'^4\,sn^4\,(ic) + 2\,(1 + k^2)\,sn^2\,(ic) - 3 = o$$

de donde

$$sn^2\,(ic) = -\frac{(1 + k^2) + 2\sqrt{1 + k^2 + k^4}}{k'^4}$$

y no se toma más que el signo que corresponde á un valor negativo del segundo miembro, puesto que $sn^2\,(ic)$ es negativo.

3.º $b=o$.

También la curva es plana, y su plano contiene al eje de giro. Se tiene además en este caso $r_3 = o$ y, si r_1 y r_2 son diferentes de cero.

$$sn\,(ic) = cn\,(ic) = dn\,(ic) = \infty$$

de donde

$$c = K'$$

Y, como á ecuaciones de la curva

$$\frac{r^2}{n^2} = \frac{4k^2}{k'^4}\,sn^2\,\frac{z + z_o}{n}$$

$$\frac{s + s_o}{n} = \frac{(1 + k^2)\dfrac{z + z_o}{n} - 2\dfrac{\theta''\,(o)}{\theta\,(o)}\dfrac{z + z_o}{n} + \dfrac{\theta'\dfrac{z + z_o}{n}}{\theta\dfrac{z + z_o}{n}}}{k'^2}$$

Si los extremos del hilo están en el eje de rotación y suponemos que el plano de las x y pasa por uno de los extremos, para $z=o$ se tendrá $r=o$, luego $z_o=o$. La segunda ecuación da del mismo modo $s_o=o$ y la curva puede considerarse como la representación mecánica de la función sn, estando constituída por distintas ondulaciones, como una sinusoide.

En la forma más sencilla

$$r = \sqrt{h^2 - a^2}\ sn\ \frac{\sqrt{2}}{a\ k'}\ z$$

es la ecuación de la curva. El valor mínimo de r corresponde al de $\bar{z}$ dado por

$$\bar{z} = \frac{a\ k'}{\sqrt{2}}\ K$$

Para el punto correspondiente, el valor de s es σ,

$$\sigma = \bar{z}\ \frac{1 + k^2 - 2\ \frac{\theta''(o)}{\theta(o)}}{k'^2}$$

Esta ecuación permite hallar el valor de k dados $\bar{z}$ y σ con la condición $\sigma > z$. El 2.º miembro aumenta continuamente con k pasando de $1 - 2\frac{\theta''(o)}{\theta(o)}$ á infinito cuando k varía de cero á uno. Por tanto dado $\frac{\sigma}{z}$, habrá un solo valor de k que satisfaga la ecuación anterior.

Conocido el valor de k se deduce fácilmente el de a, y conocidos k y a, se conoce h quedando determinadas así todas las constantes de que la curva depende. Hay una infinidad de casos posibles correspondiendo á un mismo valor de k. En efecto: supóngase que entre los extremos fijos no hay más que una semi onda (cuerda de saltar ordinaria); si se da la distancia d entre los extremos y la longitud l de la cuerda,

$$\frac{l}{2} = \sigma$$

$$\frac{d}{2} = \bar{z}$$

Una vez hallado el valor de k, el de a resulta de

$$a = \frac{\sqrt{r\ z}\ K}{k'} = \frac{\sqrt{2}}{k'} K \frac{d}{2}$$

Supóngase ahora que el hilo tiene n semiondas,

$$\frac{l}{2n} = \sigma$$

$$\frac{d}{2n} = z$$

El valor de k es el mismo que en el caso anterior, pero

$$a = \frac{\sqrt{2}}{k'} \frac{d}{2n} K$$

La nueva cuerda de saltar es semejante á la anterior, siendo uno cualquiera de los extremos comunes centro de semejanza y siendo $\frac{1}{n}$ la razón.

XIII.— Catenaria esférica

Llámase así á la figura de equilibrio de un hilo pesado dispuesto sobre una superficie esférica fija.

La ecuación en coordenadas cilíndricas r, φ y z de la superficie es

$$r = \sqrt{l^2 - z^2}$$

Supondremos que el eje z se halla dirigido hacia el centro de la tierra. La función de fuerzas es gz siendo g el peso de la unidad de longitud en el supuesto de ser homogéneo el hilo y de sección constante é igual á la unidad. Se tendrá por lo tanto

$$s - s_o + \int \frac{(h + gz)l\,dz}{\sqrt{(h + gz)^2 (l^2 - z^2) - a^2}} = o$$

$$\varphi - \varphi_o = \int \frac{al\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(h + gr)^2 (l^2 - z^2) - a^2}}$$

$$T + h = - gz$$

La variable z sólo puede tener valores que hagan positiva á la expresión

$$R = (h + gz)^2 (l^2 - z^2) - a^2$$

Si, por ejemplo, representa z_o uno de los puntos extremos fijos ó un punto de la catenaria, $R\ (z_o) > o$ y como $R\ (a)$ y $R\ (-a)$ son negativos, el polinomio R debe necesariamente tener una raíz real α entre z_o y a y otra entre z_o y $-a$. De esto resulta que la curva está comprendida entre los paralelos $z = + a$ y $z = - a$.

He aquí el modo como Clebsch (*) expresa las raíces de la ecuación $R\ (z) = o$. Escribiendo en vez de

$$h. \ldots \quad glm$$

$$a. \ldots \quad gbl^2$$

$$z. \ldots \quad l \cos \delta$$

la expresión de R adopta la forma

$$R = g^2 l^4 \left[m - \cos \delta \right]^2 sen^2 \delta - b^2$$

$$= g^2 l^4 \left[(m - \cos \delta)\, sen \delta + b \right] \left[(m - \cos \delta)\, sen \delta - b \right]$$

$$= g^2 l^4 \left[sen\,(\delta + \varepsilon) + \gamma \right] \left[cos\,(\delta - \varepsilon) + \gamma' \right] \left[sen\,(\delta - \varepsilon) - \gamma \right] cos\,(\delta - \varepsilon) + \gamma' \left]\right.$$

habiendo introducido las siguientes notaciones

$$\gamma \cos 2\varepsilon = m\, sen\, \varepsilon$$

$$\gamma' \cos 2\varepsilon = - m \cos \varepsilon$$

$$sen\, \varepsilon \cos \varepsilon + \gamma\gamma' = b$$

(*) Clebsch. l. c.

A cada par de valores de las constantes m y b corresponden valores reales de $\rho = \frac{m}{\cos 2\varepsilon}$ y ε; en efecto, respecto de ρ es evidente, y en cuanto á ε basta para convencerse de ello, eliminar $\gamma\gamma'$ de las últimas ecuaciones que definen ε y ρ, de modo que poniendo $sen\ 2\varepsilon = x$, se tiene la siguiente ecuación

$$(x - 2b)(1 - x^2) - m^2 x = 0$$

en la cual el valor $x = 1$ hace negativo al primer miembro y el valor $x = -1$ lo hace positivo, lo cual indica que debe necesariamente existir una raiz real entre $+1$ y -1 cuyo valor convendrá á $sen\ 2\varepsilon$.

Si en la última expresión de R se multiplica el primer factor por el tercero y el segundo por el cuarto, se obtiene la que sigue

$$R = -g^2 l^4 \left\{sen^2\delta\cos^2\varepsilon - sen^2\varepsilon\left(\cos\delta + \rho\right)^2\right]\left[sen^2\delta\, sen^2\varepsilon - \cos^2\varepsilon\,(\cos\delta - \rho)^2\right)$$

ó bien, poniendo otra vez en lugar de $\cos\delta$ la variable z,

$$R = -g^2\Big(z^2 + 2l\rho z\, sen^2\varepsilon + l^2\rho\, sen^2\varepsilon - l^2\cos^2\varepsilon\Big)\Big(z^2 - 2l\rho z\cos^2\varepsilon + l^2\rho^2\cos^2\varepsilon - l^2\, sen^2\varepsilon\Big)$$

$$= g^2\Big(z + l\rho\, sen^2\varepsilon + l\cos\varepsilon\sqrt{1-\rho^2\, sen^2\varepsilon}\Big)\Big(z + l\rho\, sen^2\varepsilon - l\cos\varepsilon\sqrt{1-\rho^2\, sen^2\varepsilon}\Big)$$

$$+ \Big(z - l\rho\cos^2\varepsilon + l\, sen\,\varepsilon\sqrt{1-\rho^2\cos^2\varepsilon}\Big)\Big(z - l\rho\cos^2\varepsilon - l\, sen\,\varepsilon\sqrt{1-\rho^2\cos^2\varepsilon}\Big)$$

De esta última expresión de R se deduce claramente que las 4 raíces de $R = o$ ó son todas reales si

$$\rho^2 < \frac{1}{sen^2\varepsilon}$$

$$\rho^2 < \frac{1}{\cos^2\varepsilon}$$

ó bien dos de ellas son reales y las otras dos imaginarias, lo cual ocurre cuando ρ^2 está comprendido entre

$$\frac{1}{sen^2\varepsilon} \quad y \quad \frac{1}{\cos^2\varepsilon}$$

No pueden ser las cuatro raíces imaginarias porque en este caso $\sqrt{R}$ sería imaginaria.

Si

$$\frac{1}{\rho} = sen\ \varepsilon$$

ó

$$\frac{1}{\rho} = cos\ \varepsilon$$

dos de las raíces de R son iguales, y en este caso, los valores de φ y s que en general son integrales elípticas en z, se pueden expresar mediante funciones circulares y logarítmicas. A estos casos se refieren las catenarias de Fischer en el catálogo de Brill.

Un caso especial que ha sido estudiado con pormenor es el de la llamada catenaria parabólica, en que $h=o$. En este caso, s y φ se representan también mediante funciones circulares y logarítmicas (*).

Considerando un fragmento cualquiera de catenaria esférica, es de ver que las fuerzas únicas que sobre el mismo actúan, son su peso, aplicado en el centro de gravedad, la reacción de la superficie cuya línea de acción pasa por el centro de la esfera y las dos tensiones en los extremos ó cabos. Como todas las fuerzas citadas deben equilibrarse, ha de existir una recta respecto de la cual los momentos de todas las fuerzas han de ser nulos, ó dicho de otro modo, ha de haber una recta

---

(*) La catenaria esférica parabólica tiene la interesante propiedad de que los polos de los círculos máximos tangentes á la misma forman otra catenaria esférica parabólica. Esta propiedad fué descubierta por Gudermann.

Las ecuaciones de la catenaria esférica así como sus propiedades y distintos casos particulares de la misma para valores particulares de las constantes que intervienen en sus ecuaciones, han sido estudiados par Bobillier (Gergonne, 1829), Minding, en los tomos 12 y 33 del Journal für reine und angewandte Mathematik, Gudermann, en el Grundriss der analitischen Sphärik, 1830, así como en los tomos 11 y 33 del Journal für Mathematik; Clebsch en el trabajo ya citado del mismo periódico, Biermann en su disertación inaugural de 1865 (Berlin), Schlegel en el Programm des Wilhem's Gymnasium, Berlin 1884, Apell en el Bulletin de la Société Mathematique de 1885, Venske en la disertación inaugural de 1891 (Göttingue). Marcolongo en los Rendiconti di Napoli de 1892, y Greenhill en los Proceedings of the London Mathematical Society de 1896. Gudermann fué quien dió las expresiones de las integrales mediante las funciones elípticas; del trabajo de Clebsch nos hemos ocupado ya; Biermann redujo las notaciones de Gudermann á la forma de Jacobi y Weierstrass; Schlegel, se ocupó de la determinación de las constantes dadas las posiciones de los extremos, así como la longitud de catenaria entre los mismos comprendida; y Greenhill de los casos particulares en que la integral elíptica de tercera especie que aparece en las fórmulas, se convierte en pseudo elíptica, y de las catenarias algébricas. En su excelente tratado de curvas, publicado en Coimbra, 1909, Gomes Texeira se ocupa también de la Catenaria esférica.

En la colección de Brill, Fischer ha construido catenarias esféricas y Dewar ha dibujado una serie de notas estereoscópicas de catenarias esféricas, fundadas en el ya citado y excelente trabajo de Greenhill. Estas fotografías han sido publicadas por Underwood, Londres.

que corte á las cuatro rectas según las cuales están dirigidas las fuerzas consideradas. Tres rectas que no se cortan ni están en un plano, pueden considerarse como las directrices de un hiperboloide ó paraboloide alabeado, y las dos generatrices que pasan por el punto de intersección de la cuarta recta con el ya citado hiperboloide ó paraboloide son rectas que cortan á las cuatro dadas. Si ha de existir solución es necesario que la cuarta recta corte al hiperboloide ó paraboloide constituído por las otras tres, ó sea, las cuatro rectas forman parte del sistema de rectas que corta á dos dadas, lo cual se expresa en Geometría diciendo que aquéllas forman parte de una congruencia lineal.

El valor de la tensión viene dado por la fórmula

$$T = - g z - h$$

Poniendo $h = -gz_1$, queda:

$$T = g (z_1 - z)$$

En consecuencia, si imaginamos el plano $z = z_1$, los valores de la tensión en los distintos puntos son proporcionales á sus distancias al susodicho plano, é iguales, en valor absoluto, al peso de un trozo de catenaria cuya longitud fuera igual á la citada distancia. Llámase al plano $z = z_1$ plano director.

Si hay puntos de la catenaria situados en este plano, la tensión es en ellos nula. Así por ejemplo, si los extremos son libres han de estar en este plano. Y excluyendo los valores negativos de la tensión, toda la catenaria ha de hallarse encima del plano director.

El valor de la reacción normal R se podrá hallar mediante las ecuaciones en la forma normal ó intrínseca. Proyectando las fuerzas que obran sobre un elemento según la dirección de la normal á la esfera, se tiene:

$$\frac{T}{l} - \frac{gz}{l} = R$$

y, substituyendo el valor de T,

$$R = \frac{- 2 gz}{l} - \frac{h}{l} = \frac{g (z_1 - 2 z)}{l}$$

Ahora bien, $z_1 - 2 z$ es la altura respecto del plazo director, del punto simétrico del centro de la esfera respecto del punto P en que se considera la reacción R, punto que se acostumbra á llamar anticentro de P, luego el valor de la reacción normal en un punto es igual á $\frac{g}{l}$ veces la distancia de su anticentro al

plano director. Si la reacción es positiva, el anticentro se halla encima del plano director, si es negativa, debajo. En el primer caso, la curva gravita sobre la parte convexa de la esfera, en el segundo sobre la cóncava.

Si los dos extremos de la catenaria esférica están libres, la curva es plana. Considérese, en efecto, al primer elemento *ds*. Sobre él actúan 1.º el peso dirigido verticalmente, 2.º la reacción de la superficie que pasa por el centro de la esfera, 3.º la tensión en uno solo de sus extremos, ya que en el otro es cero. Como ésta ha de equilibrar á las otras dos, estará en su plano vertical meridiano. En este mismo plano estará el elemento siguiente, y así sucesivamente.

Si la catenaria pasase por el punto más alto de la esfera en que descansa, será plana. Imaginemos, en efecto, el elemento *ds* colocado en el punto más alto. Actúan sobre él la gravedad, la reacción y las tensiones extremas. Como las dos primeras tienen la misma dirección, las dos tensiones extremas se hallan en un plano vertical, y los dos elementos *ds* próximos al considerado estarán en el mismo plano y así sucesivamente.

Esta propiedad y la anterior resultan como consecuencia de lo dicho en la pág. (6). Las fuerzas exteriores gravedad y reacción normal son tales, que su momento respecto de lo vertical que pasa por el centro de la esfera es nulo. Luego el momento de la tensión respecto del citado eje es constante. Si para algún punto de la curva fuere nulo, lo será para todos, y en este caso la curva es plana. En efecto, de

$$T\left(x\,\frac{dy}{ds} - y\,\frac{dx}{ds}\right) = o$$

se deduce,

$$x - k\,y$$

que es la ecuación de un plano meridiano vertical.

De lo dicho se deduce que, á menos que la curva esté en un plano meridiano vertical, no será posible trazar por la vertical que pasa por el centro de la esfera un plano meridiano tangente á la misma, porque en los puntos de contacto sería nulo el momento de la tensión, y en consecuencia, y, contra la hipótesis, la curva debiera hallarse en un plano meridiano vertical.

De esto se deduce que la catenaria si es una circunferencia completa, puede estar en un plano horizontal, pero no en uno vertical que no fuese meridiano.

En los puntos en que la reacción normal es nula, la proyección horizontal de la curva presenta un punto de inflexión, ya que si la reacción normal es nula, el plano osculador es vertical.

XIV.—Hilo pesado sobre superficie esférica animado de un movimiento de rotación con velocidad angular ω alrededor de su diámetro vertical.

En este caso:

$$U = \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

siendo r el radio de un círculo menor horizontal de la esfera

$$r^2 + z^2 = l^2$$

Las ecuaciones canónicas conducen por lo tanto á las siguientes integrales, en las que, en vez de h se ha escrito $-\frac{\omega^2}{2} h$ y en vez de a, ωa.

$$s - s_0 = \int \frac{l\left[h^2 - r^2\right] r\, dr}{\sqrt{\left[(h^2 - r^2)^2 r^2 - a^2\right]\left(l^2 - r^2\right)}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{l\, a\, r\, dr}{r^2\sqrt{\left[(h^2 - r^2)^2 r^2 - a^2\right]\left[l^2 - r^2\right]}}$$

$$T = \frac{\omega^2}{r}\left[h^2 - r^2\right]$$

Para que la tensión sea positiva, es necesario que $r < h$.

Es de notar que las ecuaciones diferenciales de la curva no contienen ω. lo cual significa que la forma de la curva de equilibrio es independiente del valor de ω.

Poniendo

$$R = (h^2 - r^2)^2 r^2 - a^2,$$

como quiera que, para

$$r^2 = \infty \quad , \quad h \quad , \quad o$$

se hace $R = +\infty \quad , -a^2 \quad , \quad -a^2$

y debe necesariamente ser R positiva para un valor de r comprendido entre h y o, la cubica $R = f(r^2)$ presenta tres raíces de $R=o$, positivas, dos de ellas menores que h y otra mayor. Sean estas raíces

$$\rho^2, \quad \sigma^2 \quad y \quad \tau^2$$

respectivamente. Se tendrá.

$$2h^2 = \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2$$

$$h^4 = \rho^2\sigma^2 + \rho^2\tau^2 + \sigma^2\tau^2$$

$$a^2 = \rho^2\sigma^2\tau^2$$

De las dos primeras de estas relaciones se deduce que si $\rho > \sigma > \tau$ hay entre las raíces la relación siguiente:

$$\rho = \sigma + \tau$$

así es que

$$R = \left[r^2 - (\sigma + \tau)^2 \right] \left(r^2 - \sigma^2 \right) \left(r^2 - \tau^2 \right)$$

y las tres integrales se presentan en la forma

$$s - s_o = \int \frac{l\left[\sigma^2 + \tau^2 + \tau\sigma - r^2\right] r dr}{\sqrt{(l^2 - r^2)(r^2 - \sigma^2)(r^2 - \tau^2)\left[r^2 - (\sigma + \tau)^2\right]}}$$

$$\varphi - \varphi_o = \int \frac{l\sigma\tau[\sigma + \tau]\, r dr}{r^2 \sqrt{(l^2 - r^2)(r^2 - \sigma)(r^2 - \tau)(r^2 - (\sigma + \tau)^2)}}$$

$$T = \frac{\omega^2}{2}\left[\sigma^2 + \tau^2 + \sigma\tau - r^2 \right]$$

La raíz σ puede ser mayor igual ó menor que l. Si es mayor ó igual, r está comprendida entre τ y l, y es menor, entre r y σ.

Los valores de s, φ, T y r pueden expresarse en función uniforme de un parámetro del modo indicado en la nota III sobre las funciones elípticas. Pero teniendo en cuenta que del radicando que figura en las integrales que expresan s y φ se conoce una raíz real $r^2 = l^2$, se puede proceder más sencillamente del modo que á continuación se indica en el que se hace uso de la notación de Weierstrass.

Pongamos

$$r^2 = \rho$$

$$\int_{\cdot}^{\cdot} \frac{d\rho}{\sqrt{(l^2-\rho^2)\ (\rho^2-\sigma^2)\ (\rho^2-\tau^2)\ (\rho^2-(\sigma+\tau)^2)}} = z$$

y propongámonos expresar ρ y por tanto r como función elíptica de z. Se observará, que si

$$F(\rho) = \left(l^2-\rho\right)\ (\rho-\sigma^2)\ (\rho-\tau^2)\left[\rho-(\sigma+\tau)^2\right] =$$

$$(l^2-\rho)\left[(h^2-\rho)^2\ \rho - a^2\right],$$

el teorema de Taylor permite escribir

$$F(\rho) = \left[\rho - l^2\right] F'(l^2) + \tfrac{1}{2}\left[\rho - l^2\right]^2 F''(l^2) + \tfrac{1}{6}\left(\rho - l^2\right)^3 F'''(l^2)$$

$$+ \tfrac{1}{24}\left[\rho - l^2\right]^4 F''''(l^2)$$

$$= \left[\rho - l^2\right]\left[a^2 - \left(h^2 - l^2\right)^2 l^2\right] + \left(\rho - l^2\right)^2\left[3\,l^2 - h^2\right]\left[h^2 - l^2\right]$$

$$+ \left(\rho - l^2\right)^3\left[2\,h^2 - 3\,l^2\right] - \left(\rho - l^2\right)^4$$

Si se escribe en vez de $\rho - l^2$, $\frac{l}{u}$, y para simplificar se designa á

$$a^2 - (h^2 - l^2)^2\, l^2 \quad \text{por } A,$$

á $\quad (3\,l^2 - h^2)\,(h^2 - l^2)$ » B,

y á $\quad 2\,h^2 - 3\,l^2$ » C,

se tendrá:

$$F(\rho) = u^{-4}\left[Au^3 + Bu^2 + Cu - 1\right]$$

y por tanto,

$$z = \int_l^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \int_u^{\infty} \frac{du}{\sqrt{Au^3 + Bu^2 + Cu - 1}}$$

Esta última expresión se reduce fácilmente á la forma canónica de Weierstrass. Basta cambiar de variable haciendo

$$u = \frac{4v - \frac{1}{3}B}{A};$$

de modo, que si

$$g_2 = \frac{B^2}{12} - \frac{AC}{4}$$

$$g_3 = \frac{ABC}{288} - \frac{B^3}{316} - \frac{A^2}{384},$$

se tiene

$$z = \int_v^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}}$$

Así, pues, v es función elíptica de z con los parámetros g_2 y g_3:

$$v = p(z),$$

y por consiguiente,

$$\rho = r^2 = l^2 + \frac{A}{4\left[p(z) - \frac{B}{12}\right]}$$

siendo

$$F(r^2) = \frac{A\,p'(z)}{4\left[p(z) - \frac{B}{12}\right]^2}$$

De las fórmulas anteriores resulta que r^2 es función doblemente periódica de z. Si el discriminante

$$g_2^3 - 27\, g_3^2$$

es positivo, uno de los períodos $2w$ es real y el otro $2w'$ imaginario puro.

Si

$$l > \sigma > \tau$$

á la raíz σ^2 de $F(r^2)=o$ corresponde el valor $z=w'$ y á la r^2 el valor $z=w+w'$. Entre tales valores de z, $p(z)$ y $p'(z)$ tienen valores reales siendo por lo tanto reales también los de r^2 y $F(r^2)$.

Si

$$\sigma > l > \tau$$

á la raíz l corresponde el valor $z=o$, y á la raíz τ el valor $z=w$, entre las cuales, al variar z, hace reales á r^2 y $\sqrt{F(r^2)}$

Si el discriminante

$$g_2^3 - 27\, g_3^2$$

es negativo, los dos períodos son imaginarios conjugados de la forma

$$2w_1 = w_2 - i\, w'_2$$

y

$$2w_3 = w_2 - i\, w'_2;$$

$p(z)$ y $p'(z)$ sólo tienen simultáneamente valores reales para valores del argumento comprendido entre cero y $w_1 + w_3$ para los que se anula la derivada. En este caso uno de los paralelos límites es el ecuador.

Si el discriminante

$$g_2^3 - 27\, g_3^2$$

es nulo, la función $p(z)$ degenera. Si g_2 y g_3 son distintos de cero, el período w se conserva finito pero el w' se hace infinito y

$$p(z) = -\frac{\pi^2}{12\,w^2} + \frac{\pi^2}{4\,w^2}\,\frac{1}{sen^2\,\frac{\pi\,z}{2\,w}}$$

siendo

$$p'(z) = -\frac{\pi^3}{4\,w^2}\,\frac{\cos\frac{\pi\,z}{2\,w}}{sen^3\,\frac{\pi\,z}{2\,w}}$$

En este caso, por lo tanto,

$$r^2 = l^2 + \frac{A}{4}\,\frac{sen^2\,\frac{\pi\,z}{2\,w}}{\frac{\pi^2}{4\,w^2} - \left[B + \frac{\pi^2}{12\,w^2}\right] sen^2\,\frac{\pi\,z}{2\,w}}$$

En esta expresión, como en las anteriores del valor de r^2 es necesario tomar los valores del segundo miembro de modo que el segundo sumando sea nulo ó negativo á fin de que añadido con su signo á l^2 el resultado sea menor ó igual que l^2.

Si $g_2 = g_3 = o$ los dos períodos $2w$ y $2w'$ son infinitos y la función $p(z)$ degenera en la algébrica racional

$$\frac{1}{z^2}$$

siendo

$$p'(z) = \frac{-2}{z^3}$$

Así es que en este caso particular

$$r^2 = l^2 + \frac{A}{4}\,\frac{z^2}{1 - B\,z^2}$$

en cuya expresión sólo deben darse á z aquellos valores que hagan á r^2 positiva y menor que l^2.

Una vez expresado ρ ó r^2 en función uniforme del parámetro z, vamos á hacer lo propio con los valores de s y φ

Para la última se tendrá con las notaciones nuevas

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{la}{2} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dz}{\rho} = 2\,la \int_{z_0}^{z} \frac{(p(z) - B)\,dz}{4\,l^2 (p(z) - B) + A} =$$

$$\frac{a}{2\,l}(z - z_0) - \frac{Aa}{2\,l} \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{4\,l^2 (p(z) - B) + A}$$

ó bien, introduciendo la cantidad c definida por

$$4\,l^2 B - A = 4\,l^2 p(c)$$

se podrá escribir

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{a}{2\,l}\left[z - z_0\right] - \frac{Aa}{8\,l^3} \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{p(z) - p(c)}$$

Descomponiendo la cantidad subintegral en funciones simples é integrando

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{a}{2\,l}\left[z - z_0\right] - \frac{Aa}{8\,l^3} \frac{1}{p'(c)} \int_{z_0}^{z} \left[\zeta(z-c) - \zeta(z+c) + 2\,\zeta(c)\right] dz =$$

$$\frac{a}{2\,l}\left[z - z_0\right] - \frac{Aa}{8\,l^3} \frac{1}{p'c)} \left[log\ nep\ \frac{\sigma(z-c)}{\sigma(z-c)} + 2\,z\,\zeta(c)\right]_{z_0}^{z}$$

ó bien

$$\varphi = \frac{az}{2\,l}\left[1 - \frac{\zeta(c)}{2\,l^2 p'(c)}\right] - \frac{Aa}{8\,l^3 p'(c)}\ log\ nep\ \frac{\sigma(z-c)}{\sigma(z+c)} + Constante$$

El valor del arco como función uniforme de z se obtendrá de un modo análogo

$$s - s_0 = \frac{l\,h^2}{2} \int dz - \frac{1}{2} \int \rho\ dz = \frac{l\,h^2}{r}\,z - \frac{1}{2}\,l^3\,z - \frac{Al}{8} \int \frac{dz}{p(z) - B}$$

Escribiendo $B = p(d)$

$$s = \frac{l}{2}\,z\,(h^2 - l^2) - \frac{Al}{8\,p'(d)}\ log\ nep\ \frac{\sigma(z-d)}{\sigma(z+d)}\ l^{2\,z\,\zeta(d)} + Const.$$

Dejamos al cuidado del lector el hallar las fórmulas para φ y s en los casos de degeneración ya considerados para r.

El valor de la tensión, lo da la fórmula

$$T = \frac{\omega^2}{2}\left| h^2 - r \right| = \frac{\omega^2}{2}(h - r)(h + r)$$

Si se considera la superficie cilíndrica de radio h, la tensión en un punto P del hilo es proporcional al producto de distancias de P á la citada superficie, é igual á $\frac{\omega^2}{2}$ veces este producto. Si los extremos están libres, se hallan situados en aquel cilindro que podría llamarse director por su analogía con el plano de igual nombre en la catenaria esférica.

El valor de la reacción normal es

$$R = -\omega^2 r \times \frac{r}{l} + \frac{T}{l} = \frac{\omega^2}{2l}\left[h^2 - 3r^2\right] = \frac{\omega^2}{2l}\left[h - \sqrt{3}r\right]\left[h + \sqrt{3}r\right]$$

De estas fórmulas se deduce que el valor de la reaccción normal en un punto se obtiene multiplicando por $\frac{\omega^2}{2l}$ el producto de distancias de P al cilindro vertical de base circular y radio $\frac{h}{\sqrt{3}}$, el cual es evidentemente interior al otro de radio h. Por tanto, si los extremos son libres, en la parte de curva comprendida en el interior de un cilindro recto vertical y circular, cuyo eje pasara por el centro de la esfera y cuyo radio fuera $\frac{l}{\sqrt{3}}$ veces el del cilindro coaxial con el anterior y que pasara por los extremos libres, la reacción normal sería positiva, apoyando la curva contra la parte cóncava de la superficie esférica, y en cambio, en al parte comprendida entre los dos cilindros, la curva descansaría sobre la convexa. En los puntos en que la reacción es nula, y son los situados en el cilindro de radio $\frac{h}{\sqrt{3}}$ el plano osculador contiene el radio. Si se proyectara la curva sobre un plano normal al radio, presentaría un punto de inflexión la curva proyectada.

Si $\frac{h}{\sqrt{3}} > l$ no existen puntos para los que se anula la reacción normal.

De los valores de R y T se deduce

$$3T - lR = \omega^2 h^2 \quad ;$$

así pues, en los extremos libres donde $T=o$, la reacción vale

$$R = \frac{-\omega^2 h^2}{l}$$

y está dirigida hacia el centro de la esfera. Como en los puntos en que la tensión es nula, $h = r_o$ siendo r_o el valor de r que corresponde á los mismos,

$$R = \frac{-\omega^2 r_o^{\,2}}{l}$$

A esta expresión de R puede llegarse directamente proyectando la fuerza $\omega^2 r_o$ sobre la normal interna.

A partir de los extremos supuestos libres, R disminuye en valor absoluto, anulándose cuando $r = \frac{r_o}{\sqrt{3}}$. En este caso

$$T = \frac{w^2 h^2}{3}$$

A partir de este valor de T, R es positivo y T y R aumentan, mientras r disminuye alcanzando el máximo cuando $r = \tau$ que es su valor mínimo.

El valor τ puede ser igual á cero, pasando entonces la curva por el punto más alto ó más bajo de la esfera, ó por los dos. En este caso se debe tener $a=o$. El radicando R tiene una raíz igual á cero y otra doble é igual á h. Si $h > l$, y tiene la curva los extremos libres, la curva está en el segmento esférico, cuya base es el círculo de radio h. Como el momento de la tensión respecto del eje de giro es constante por ser iguales á cero los momentos de las fuerzas exteriores y de la reacción respecto del mismo eje, si en algún punto el momento de la tensión es cero, lo será á lo largo de la misma. En particular, si los extremos son libres la curva será plana, y si algún elemento de la misma se hallase en un mismo plano con el eje de giro, todos estarán en un plano que pase por el citado eje. Luego si una curva tiene los extremos libres, estará contenida en un plano diametral vertical siendo un trozo de círculo máximo, y si pasa por el punto más alto ó el más bajo de la esfera, será del mismo modo un fragmento de círculo máximo.

La propiedad de ser constante el momento de la tensión nos conduce á la siguiente propiedad análoga á la de la catenaria esférica ordinaria y que se demostraría del mismo modo: No puede existir punto ninguno de la curva al que

sea tangente un plano que pase por el eje de giro. Por lo tanto, la curva no puede ser un círculo menor vertical ni un círculo menor, cuyo plano sea cortado por el eje de giro en un punto exterior al citado círculo. Podrá ser un círculo menor horizontal cuando las raíces σ y τ sean iguales.

La curva sólo podrá ser un círculo horizontal cuando la reacción resultante en un fragmento cualquiera esté contenida en el plano de la curva en que se halla la resultante de las fuerzas centrífugas y las tensiones extremas. Esto sólo ocurirá en los círculos intersección del cilindcro de radio $\frac{h}{\sqrt{3}}$ con la esfera, porque en ellos la reacción es nula, y cuando el hilo está dispuesto según el ecuador de la citada superficie.

XV — Catenarias dispuestas sobre superficies desarrollables

Las ecuaciones intrínsecas del equilibrio de un hilo en una superficie referidas á la tangente á la curva, normal á la superficie y una tercera dirección perpendicular al plano de las dos anteriores, á saber:

$$\mathfrak{T} + \frac{dT}{ds} = o$$

$$\frac{T}{\rho} \cos \beta + N + \mathfrak{N} = o$$

$$\mathfrak{N}' + \frac{T}{\rho} \operatorname{sen} \beta = o$$

siendo β el ángulo que la normal principal de la curva forma con la normal á la superficie, nos conducen á la siguiente propiedad: Si se desarrolla una superficie desarrollable sobre un plano y se mantienen invariable $\mathfrak{T}$ y $\mathfrak{N}'$, continúa el hilo en equilibrio en el plano, variando sólo N. En efecto, al desarrollar la superficie no altera la curvatura geodésica $\frac{\operatorname{sen} \beta}{\rho}$ de sus líneas, la cual es la curvatura de la sección recta del cilindro, cuya directriz es la curva dada y cuyas generatrices son paralelas á la normal á la superficie en el punto considerado, convirtiéndose

aquella curvatura geodésica en la ordinaria de la curva transformada. En consecuencia, si $\frac{sen\ \beta}{\rho}$ no altera y $\mathfrak{T}$ y $\mathfrak{N}'$ permanecen invariables, la tensión permanecerá la misma, la primera y la tercera de las intrínsecas son las mismas antes y después del desarrollo, y son las ecuaciones intrínsecas del equilibrio en el plano. Durante el desarrollo no altera por lo tanto el equilibrio del hilo, variando sólo la reacción normal de la superficie cuyo valor da la segunda de las intrínsecas. Así, por ejemplo, si se tiene una catenaria pesada dispuesta en un cilindro vertical, y se desarrolla este cilindro sobre uno de sus planos tangentes, la curva transformada será la de equilibrio de un hilo pesado en un plano. La figura de equilibrio de una catenaria pesada dispuesta sobre un cono de revolución de eje vertical se transforma al desarrollar el cono en la curva plana de equilibrio de un hilo cuyos elementos están atraídos ó rechazados por un punto del plano que corresponde al vértice del cono, por una fuerza constante. De este modo las figuras de equilibrio de hilos dispuestos en superficie desarrollables se refieren al de sus transformadas planas.

En los casos de ser las superficies cilíndricas y cónicas la ecuación intrínseca que da el valor de la reacción normal N se puede transformar del siguiente modo.

En efecto:

$$N = -\mathfrak{N} - \frac{T}{\rho} cos\ \beta = -\mathfrak{N} - \frac{T}{\rho_1}$$

siendo ρ_1 el radio de curvatura de la sección normal á la superficie que pase por la misma tangente que el plano osculador. Pero llamando ρ' y ρ'' los radios principales de curvatura y θ el ángulo que la tangente á la curva forma con una de las tangentes principales,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{cos^2\theta}{\rho'} + \frac{sen^2\theta}{\rho''}$$

En el caso del cilindro $\rho' = \infty$, $\rho'' = r$ siendo r el radio de curvatura de la sección recta, luego:

$$N = \mathfrak{N} - \frac{T\ sen^2\theta}{r}$$

En esta fórmula θ es el ángulo que la tangente forma con la generatriz.

En el caso del cono de revolución $\rho' = \infty$, y si l es la longitud de la generatriz desde el vértice hasta el punto de contacto, $\rho'' = l\ tg\ \alpha$ siendo α el semiángulo de abertura del cono. Luego

$$N = -\mathfrak{M} - \frac{T\ sen^2\ \theta}{l\ tg\ \alpha}$$

En esta fórmula θ es el ángulo que la tangente forma con la generatriz (*).

XVI — Geodésicas del catenoide y la pseudo esfera de Beltrami

Llámase catenoide á la superficie de revolución engendrada al girar una catenaria ordinaria alrededor de la base que se tomará como eje de las z en lo que sigue.

Llamando z, r y θ á las coordenadas cilíndricas que definen la posición de un punto de la superficie, la ecuación de ésta será (V. párr. XVIII).

$$r = a\ cos\ h\ \frac{z}{a}$$

siendo a el radio del paralelo mínimo.

Para hallar la ecuación diferencial de las geodésicas, se observará que siendo aquéllas las curvas realizadas por hilos no sujetos á otra fuerza exterior que la reacción normal de la superficie, la tensión es constante. Y, como en las superficies de revolución la normal corta al eje, el momento de la tensión respecto al mismo será constante. Así pues, llamando α al ángulo que la geodésica forma con el meridiano

---

(*) Dannehl en su Disertación de 1887 (Könisberg) estudia los casos de estar dispuesto un hilo sobre un cilindro ó cono rectos, y sobre un paraloloide de revolución.

V. también Peirce Astronomical Journal 1856 (cono).

Vieille se ha ocupado de la catenaria sobre el cono recto. V. S. Germain Recueil d'exercices sur la mécanique Rationelle, París, 1889.

$$T\, r\, sen\, \alpha = Const.$$

ó

$$r\, sen\, \alpha = Const.$$

Además

$$sen\, \alpha = \frac{r d\theta}{ds}$$

y la ecuación diferencial de las geodésicas será

$$\frac{r^2 d\theta}{ds} = Const. = b$$

La ecuación anterior se puede transformar como sigue. Se deduce que

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{r^4}{b^2}$$

$$\frac{dz^2}{d\theta^2} + \frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2 = \frac{r^4}{b^2}$$

Y aplicando esta última al catenoide en que

$$\frac{dr}{d\theta} = sen\, \mathfrak{h}\, \frac{z}{a} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$$

se tendrá

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{b^2}$$

Evidentemente r ha de ser mayor que a.

Si $b^2 > a^2$, para que el segundo miembro de la última fórmula sea positivo es necesario que $r^2 > b^2$ y la geodésica es tangente al paralelo de radio b. La ecuación del cilindro que la proyecta sobre un plano normal al eje es

$$\theta = \int_r^\infty \frac{b\,dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)\,(r^2 - b^2)}}$$

de donde se deduce, invirtiendo la integral

$$\frac{b}{r} = sn\,\theta$$

con módulo $k = \frac{a}{b}$. La constante de integración se supone determinada de modo que $\theta = o$ para $r = \infty$ Si $b^2 < a^2$ la geodésica corta al círculo de garganta de la superficie bajo un ángulo β dado por

$$a\ sen\ \beta = b$$

Y la ecuación del cilindro proyectante es

$$\frac{r}{a} = sn\,\frac{\theta}{k}$$

siendo $k = \frac{b}{a}$

Si $b^2 = a^2$ las funciones elípticas que resultan en las integraciones anteriores degeneran en hiperbólicas. En este caso,

$$r = a\,\frac{cos\ h\,\theta}{sen\ h\,\theta}$$

La solución representa una curva asíntota al círculo $r = a$.

Una de las propiedades más importantes del catenoide es su aplicabilidad sobre un helicoide alabeado de plano director, propiedad conocida con el nombre de teorema de Bour. Para efectuar la aplicación de una superficie sobre otra basta

considerar abierto el catenoide por uno de sus meridianos y limitado en el círculo de garganta; si se deforma la superficie de modo que el citado círculo se convierta en una recta, el catenoide se convierte en un helicoide alabeado de plano director de paso a, y tal que aquella recta es el eje. Los paralelos del catenoide se convierten en hélices.

La ecuación del helicoide transformado es:

$$z = a\,\varphi$$

en la que el eje de la z es la recta transformada del círculo de garganta y z y φ son las coordenadas de una generatriz del helicoide. En la deformación que constituye la aplicabilidad, los elementos lineales conservan su longitud, luego si ρ representa la distancia de un punto al eje en el helicoide,

$$r^2\,d\theta^2 = \rho^2\,d\varphi^2 + dz^2 = (\rho^2 + a^2)\,d\varphi^2$$

Y como los paralelos se transforman en hélices de paso a,

$$(2\pi r)^2 = 4\pi^2(\rho^2 + a^2),$$

luego

$$\theta = \varphi$$

De las dos relaciones últimas y de la noción de aplicabilidad se deduce que las geodésicas del helicoide alabeado de plano director se obtendrán de las del catenoide poniendo en vez de r^2, $\rho^2 + a^2$, y en vez de θ. φ en las ecuaciones de esta última superficie (*).

La superficie denominada pseudo-esfera de Beltrani es la de revolución engendrada por la rotación de la curva

$$r = R\,sen\,\varphi$$
$$z = R\int \frac{cos^2\,\varphi}{sen\,\varphi}\,d = R\left\{ log\,tg\,\frac{1}{2}\,\varphi + cos\,\varphi \right]$$

(*) V. Darboux. Leçons sur la theorie des surfaces. Greenhill. Traité des fonctions elliptiques.

alrededor del eje de las z. La curva es la tractriz ó evolvente de la catenaria ordinaria. El parámetro φ en función del cual vienen dadas r y z representa el ángulo que la tangente á la curva meridiana forma con el eje de rotación.

Si se calculan los radios principales de curvatura en un punto cualquiera de la superficie, se halla que su producto es constante é igual á $-R^2$.

A la cantidad producto de las dos curvaturas principales se ha dado en llamar curvatura de Gauss ó simplemente curvatura. La pseudo-esfera es, pues, tal, que la curvatura es constante y negativa.

Además, los paralelos de la misma son líneas de curvatura geodésica constante (horiciclos) é igual á $\frac{1}{R}$, como se puede ver observando que el radio de curvatura geodésico en los paralelos de las superficies de revolución es igual á la porción de tangente al meridiano comprendida entre el punto de contacto y el eje. Y esta longitud es constante é igual á $\frac{1}{R}$ en la pseudo esfera. (V. más adelante al tratar de la catenaria común).

La ecuación diferencial de las geodésicas será en este caso

$$ds^2 = r^2\, d\theta^2 \times \frac{r^2}{c^2}$$

ó sea, como que

$$dr^2 = \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) dr^2 \quad ,$$

$$\frac{R^2}{r^2}\, dr^2 = r^2\, d\theta^2 \left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)$$

de donde

$$d\theta = \pm \frac{c\, R\, dr}{r^2 \sqrt{r^2 - c^2}}$$

é integrando

$$\theta = \pm \frac{R}{c} \sqrt{1 - c^2 \frac{1}{r^2}} \qquad + C'$$

en cuya integral c y c' son constantes.

Si se transforma la ecuación anterior poniendo

$$\theta = x$$

$$\frac{R}{r} = y$$

la curva transformada tiene por ecuación

$$\left(x - c'\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{c^2}$$

Si se considera á x é y como coordenadas rectangulares planas, la ecuación anterior es la de un círculo cuyo centro está en el eje de las equis.

En la transformación de que nos ocupamos, á los puntos reales á distancia finita y situados en la superficie, corresponden unívocamente puntos de semiplano positivo y $> o$. Los puntos $r = \infty$ de la superficie tienen por conjugados los del eje de las x, que por esta razón se llama recta límite. Los meridianos se convierten en paralelas al eje de las y, y los paralelos en paralelas al eje x. Ahora bien, por dos puntos del semiplano positivo pasa siempre una circunferencia y sólo una ortogonal á la recta límite, y por tanto por dos puntos dados en la pseudo esfera pasa una geodésica y una tan sólo.

La longitud de la geodésica será la que resulte de

$$ds^2 = r^2\, d\theta^2 + dr^2 + dz^2 = \frac{R^2}{r^2 - c^2}\, dr^2$$

que es

$$s = \int \frac{R\, dr}{\sqrt{r^2 - c^2}} = R\, lognep \left\{ \frac{R}{y} + \sqrt{\frac{R^2}{y^2} - c^2} \right\} + c''$$

Si se conviene en medir el arco s á partir del punto al que corresponde la

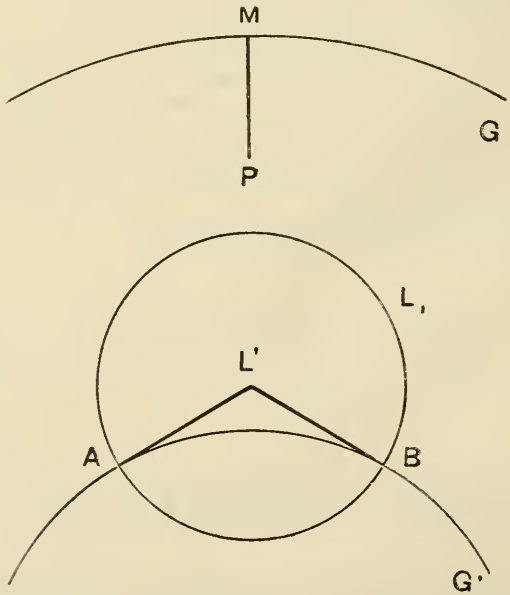
ordenada máxima $\frac{y}{c}$, la constante c'' debe tomarse igual á $-R\ lognep\ c$, y entonces

$$s = R\ lognep \left\{ \frac{R}{cy} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{R^2}{y^2} - c^2} \right\}$$

La cantidad que se halla entre paréntesis es igual á la razón anharmónica de los cuatro puntos siguientes de la circunferencia: los dos transformados del origen y fin del arco s, y los puntos en que la circunferencia corta al eje x. Los dos primeros se suponen conjugados entre sí así como los dos últimos.

Si se transforma por radios rectores recíprocos todo el semiplano positivo tomando el origen O_1 de inversión en la parte negativa del plano, la recta límite se convierte en una circunferencia L_1 llamada límite y todo el semiplano positivo se representa en el círculo limitado por L_1.

Sea P (fig. 1) un punto cualquiera de la pseudo-esfera y L' el punto corres-



(Fig. 1.ª)

pondiente dentro de L_1. Supongamos que la posición del centro O_1 de inversión ha sido elegida de tal modo que L' sea el centro de L_1. En este caso, las geodésicas de la pseudo esfera que pasan por P se convertirán en rectas diámetros de la circunferencia L_1 ya que han de transformarse en circunferencias ortogonales á L_1 que pasen por su centro. Considérese una geodésica G que no pase por P. Después de las dos transformaciones indicadas, la primera de superficie á plano, la segunda por radios rectores recíprocos sin salirse de éste, transformaciones que no alteran los ángulos, la geodésica G se habrá convertido en una circunferencia G' ortogonal á L_1. Sean A y B los puntos de intersección de G' y L_1, los cuales representarán puntos al infinito de G. Pero $L'A$ y $L'B$ representan dos geodésicas, luego por el punto P pueden trazarse *dos* geodésicas que tienen comunes los puntos del infinito con la geodésica G. Llámanse las dos citadas geodésicas, *paralelas* á G. Por lo tanto, en la pseudo esfera, por todo punto pueden trazarse dos geodésicas paralelas á otra dada. Y, como los demás diámetros de L_1 representan geodésicas también, resulta que por un punto pueden trazarse infinitas geodésicas que corten á otra dada que no pase por P, así como infinitas que no la corten.

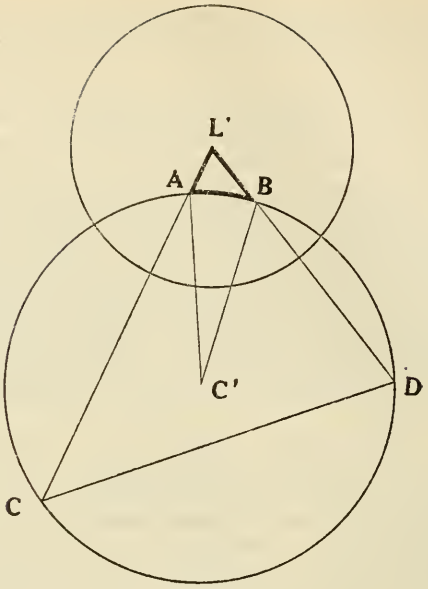
El ángulo α tal que $AL'B = 2\alpha$ es llamado ángulo de paralelismo. Este ángulo depende de la distancia PM de P á la geodésica ó de la distancia de L' á la transformada, ya que PM, por ser mínima distancia de P á G, ha de tener por transformada la que á su vez es la mínima distancia de L' á G'.

Considerando un triángulo constituído por tres geodésicas (fig. 2), y tomando uno de sus vértices por punto P, tal que después de las dos transformaciones viene á ser el L' centro de la circunferencia límite, el triángulo transformado será mixtilíneo, dos de sus lados serán partes de radios $L'A$ y $L'B$, siendo el tercero la transformada AB, que es arco de circunferencia. La suma de los ángulos del citado triángulo es menor que dos rectos, siendo la diferencia igual á $AC'B$. Se tiene, en efecto, que el ángulo semiinscrito A es igual al inscrito ADC por abrazar igual arco, del mismo modo el semiinscrito B es igual á BCD, por lo tanto, designando por las letras de sus vértices los ángulos del triángulo $L'AB$,

$$L' + A + B = L' + ADC + BCD = L' + BDC + ACD - BCA - BDA$$

$$= 180^\circ - BCA - BDA = 180 - AC'B$$

Estas propiedades de la geometría de la pseudo-esfera conducen á una representación de la geometría hiperbólica, análoga á la representación de la elíptica por la esfera ordinaria. A las rectas de la geometría euclídea ó á los círculos máximos de la de Riemann corresponden en la de Lobatchefskij y Bolyai las geo-



(Fig. 2)

désicas de la pseudo esfera de Beltrami. A éste se debe la invención de tan curiosa representación geométrica (*).

XVII — Catenarias electrodinámicas

Con este nombre designó Riecke las figuras de equilibrio realizadas por hilos conductores flexibles é inextensibles recorridos por una corriente eléctrica constante y sujetos á la acción de un campo magnético.

(*) E. Beltrami. Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea.—Giornale di matematica (1868).

En las consideraciones anteriores hemos seguido á Bianchi en sus Lezioni di Geometria Diferenziale. Pisa 1902.

V. también J. Doménech. Geometrías racionales. Barcelona, 1906.

Supongamos que el campo magnético es uniforme y de intensidad H. Se recordará que la acción N de un campo magnético sobre un elemento de corriente es proporcional:

1.° A la intensidad de la corriente eléctrica que atraviesa este último.

2.° A la longitud ds del mismo.

3.° Al seno del ángulo θ que forma H con ds.

4.° La intensidad H del campo magnético; y está además dirigida según la perpendicular á un plano paralelo á H y ds.

Por ser la fuerza N normal á ds, su proyección sobre la tangente á la curva de equilibrio será nula, luego en virtud de la primera de las intrínsecas, la tensión es constante:

$$T = Const.$$

Por otra parte N es la única fuerza exterior que obra sobre el hilo, luego estará situada en el plano osculador, y como es normal á ds, su dirección será la de la normal principal á la curva.

Considerando el cilindro cuya directriz es la curva de equilibrio y cuyas generatrices son paralelas á la dirección H del campo magnético, como la dirección de N es también perpendicular á la H el plano osculador á la curva de equilibrio será normal á la citada superficie cilíndrica. Luego la curva de equilibrio es una geodésica del citado cilindro, y el ángulo θ que forma la tangente con la generatriz, es, por consecuencia, constante.

Por otra parte, la segunda de las ecuaciones intrínsecas da

$$\frac{T}{\rho} = k\, H\, sen\, \theta$$

siendo k una constante. Luego

$$\rho = \frac{T}{k\, H\, sen\, \theta} = Const.$$

y la curva de equilibrio es por lo tanto una hélice ó una circunferencia.

Si la fuerza magnética no fuese constante y procediese de un polo, se recordará que en este caso

$$H = \frac{P}{l^2}$$

siendo P una constante y l la distancia del elemento ds al polo.

La fuerza H es, como antes, normal al plano definido por ds y la generatriz que lo une al polo, luego, como antes, la curva de equilibrio será una geodésica del cono definido por el polo como vértice y la curva como directriz.

Por ser geodésica, se verificará que

$$l \operatorname{sen} \theta = d$$

siendo d una constante, que representa la menor distancia del polo á la geodésica, ó el trozo de perpendicular trazada desde el polo á la recta en que transforma la geodésica en el desarrollo del cono, y comprendida entre el polo y la recta dicha.

La primera de las ecuaciones intrínsecas conduce á la propiedad de ser la tensión constante, y la segunda á la siguiente relación:

$$\frac{T}{\rho} = \frac{k\,P}{l^2} \operatorname{sen} \theta = \frac{k\,P \operatorname{sen}^2 \theta}{d \quad l}$$

Como por otra parte, si ρ'' es el radio de curvatura de la sección principal perpendicular á la generatriz,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho''} \operatorname{sen}^2 \theta,$$

se tendrá

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{k\,P}{T\,d} \quad \frac{1}{l}$$

ó sea

$$\rho'' = \frac{T\,d}{k\,P}\ l$$

lo cual expresa que el citado como lo es de revolución siendo α el semiángulo de abertura, el cual viene dado por

$$\alpha = arc.\ tg.\ \frac{T\,d}{k\,P}$$

Riecke ocupóse del caso en que H es constante, deduciendo algunas de las propiedades de la curva de un modo distinto á como lo hemos hecho aquí, y con objeto de comprobar la ley elemental del electromagnetismo (*). Darboux se ha ocupado del segundo caso (**).

XVIII — Catenarias planas

La catenaria ordinaria es la figura de equilibrio de un hilo pesado homogéneo flexible é inextensible de sección uniforme y sujeto por dos puntos (***). Es evidentemente una curva plana, ya que la fuerza exterior tiene una dirección fija.

Si el peso de la unidad de longitud se designa por p, y se dispone el eje de las z vertical siendo el sentido positivo del mismo del origen al cenit, las ecuaciones canónicas permiten escribir á continuación

$$U = -\,p\,z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{(h - pz)^2 - a^2 - b^2}$$

Tomando al plano de la curva como plano de las $x\ z$, se tendrá $b{=}o$.

(*) Riecke Ueher die elektrodynamische Kettenlinie. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingue 1884.

(**) V. S. Germain. Problemes de Mecanique Rationelle. Paris 1889.

(***) Son de citar las siguientes monografías acerca de la catenaria: Kulick Theorie und Tafeln der Kettenlinie, Praga, 1832; id. Theorie der Gewölhe und Kettenlinien, Leipzig, 1881; Gretschel Elementare Ableitung der Haupteigenschaften der Kettenlinie. Archiv der Mathematik und Physik, 1865, Jung Synthetische Behandlung der allgemeine Kettenlinie, Zeitskrift der Mathematik und Physik 1900; Dobrachowsky Monographie der Kettenlinie, Berna, 1907. Tous, La Catenaria y sus aplicaciones mecánicas. Academia de Ciencias de Barcelona, 1908. Acerca del descubrimiento de la curva v. más adelante.

De las ecuaciones últimas se deduce

$$V = h\,s + ax + \int \sqrt{(h - pz)^2 - a^2}\,dz$$

Y en consecuencia, las ecuaciones de la catenaria serán

$$\alpha = z - \int \frac{a\,dz}{\sqrt{(h - pz)^2 - a^2}} = z + \frac{a}{p}\,loguep\left[(h - pz) + \sqrt{(h - pz)^2 - a^2}\right]$$

$$\sigma = s + \int \frac{(h - pz}{\sqrt{(h - pz)^2 - a^2}}\,dz = s + \frac{1}{p}\sqrt{(h - pz)^2 - a^2}$$

siendo

$$T = -h + pz$$

Se suelen presentar estas ecuaciones en otra forma, introduciendo las notaciones siguientes

$$h = pz_o \quad , \quad \frac{a}{p} = -m \quad , \quad \alpha + \frac{a}{p}\,loguep\,a = x_o$$

de modo que se puede escribir

$$e^{\frac{x - x_o}{m}} = \frac{z - z_o}{m} + \sqrt{\frac{(z - z_o)^2}{m^2} - 1}$$

De esta expresión se deduce esta otra:

$$e^{-\frac{x - x_o}{m}} = \frac{1}{\frac{z - z_o}{m} + \sqrt{\left(\frac{z - z_o}{m}\right)^2 - 1}} = \frac{\frac{z - z_o}{m} - \sqrt{\left(\frac{z - z_o}{m}\right)^2 - 1}}{1}$$

Sumando miembro á miembro las dos fórmulas últimas, se tiene:

$$\frac{m}{2}\left[e^{\frac{x-x_o}{m}} - e^{-\frac{x-x_o}{m}}\right] = z - z_o \qquad (30)$$

La longitud de la catenaria será con las nuevas notaciones,

$$s - \sigma = m\sqrt{\left(\frac{z-z_o}{m}\right)^2 - 1}$$

ó bien, substituyendo el valor de z-z_o dado por (30).

$$s - \sigma = \frac{m}{2}\left[e^{\frac{x-x_o}{m}} - e^{-\frac{x-x_o}{m}}\right]$$

La tensión tendrá por valor:

$$T = p\,(z - z_o)$$

Trasladados los ejes de modo que el nuevo origen sea el punto $x_o\ z_o$, la ecuación de la catenaria adopta la forma simplicada:

$$z_1 = \frac{m}{2}\left[e^{\frac{x_1}{m}} + e^{-\frac{x_1}{m}}\right]$$

la cual hace patente que *la curva es simétrica respecto del eje* z_1. Al eje x_1 se ha dado en llamar *base* ó *directriz* de la catenaria. *El punto más bajo de la misma dista de la base una cantidad igual á* m.

En el nuevo sistema de coordenadas,

$$s = \sigma + \sqrt{z_1^2 - m^2}$$

Si se cuentan los arcos desde el punto más bajo en que $z_1 = m$, la constante σ será nula, y se tendrá

$$s = \sqrt{z_1^2 - m^2}$$

Además

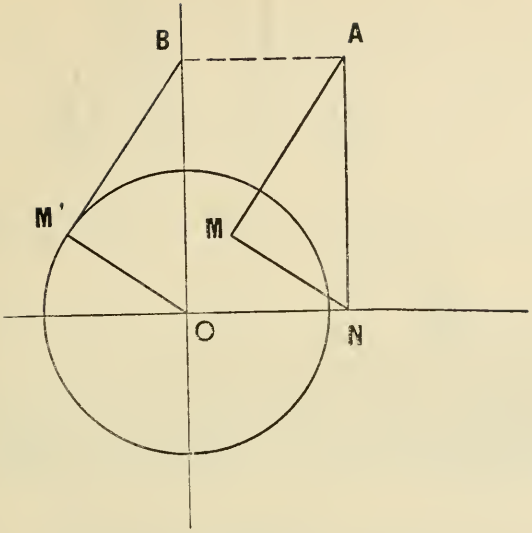
$$T = pz_1$$

fórmula que expresa la propiedad de *que la tensión en un punto es igual al peso de una porción de hilo cuya longitud sea igual á la ordenada* z_1 *del mismo, ó distancia del punto en que se considera la tensión á la base*. En otras palabras, si los dos extremos de la catenaria son los puntos de contacto de dos poleas muy pequeñas con la misma, y la catenaria se halla suspendida de las citadas poleas colgando de ellas una cierta longitud de hilo, el sistema estará en equilibrio cuando los trozos que cuelgan verticalmente sean en longitud iguales á las ordenadas de los citados puntos de contacto referidas á la base de la curva

De la fórmula

$$s^2 = z_1^2 - m^2$$

se deducen consecuencias interesantes. Así por ejemplo: *La evolvente de la catenaria* (tractriz), *es una curva tal, que la longitud de la tangente es constante é igual á m*. En efecto, la fórmula anterior expresa que la longitud de la tangente $Mn = m$ á la tractriz es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $z_1 = AN$ y cuyo otro cateto $MN = s$ es la longitud del arco á contar desde el origen de arcos ó "vértice" de la curva (fig. 3). De esta propiedad se deduce un modo de dibujar gráficamente la tractriz por puntos y tangentes. Basta, en efecto, trazar con centro en el origen de coordenadas, una circunferencia de radio igual á m (*parámetro*); tomar en el eje de la catenaria un punto B de igual altura que el A dado en la misma, y por B trazar la tangente á la dicha circunferencia: el punto M situado sobre AM, paralela á BM', y tal que $AM = BM'$, es un punto de la tractriz, y MN paralela á $M'O$ es la tangente á la misma.



(Fig. 3)

Podrá convenir, en algunos casos, *la determinación de las constantes de la catenaria* conocidas *su longitud y las posiciones de los puntos de suspensión.* Para ello podrá procederse como sigue (*).

Sean *o, o* y α, β las coordenadas de los puntos de suspensión del hilo, y supongamos referida la curva á dos ejes rectangulares, unos de ellos vertical y cuyo origen común sea el punto *o, o,* y colocados de tal modo que α y β sean positivos.

Puesto que la curva ha de pasar por el origen y por el punto α, β, se tendrán las dos condiciones siguientes entre las constantes z_o, x_o y m:

(*) Appell Traité de Mécanique Rationnelle, tomo I.

Appell en su tratado de Mecánica y D. José R. Castizo en el tratado de Estática (Madrid 1910) examinan el caso de una catenaria de longitud dada cuyos extremos se hallen sujetos á resbalar sobre dos rectas dadas. El primero da la solución geométrica y el segundo trata el problema analiticamente.

$$\left.\begin{aligned} -z_0 &= \frac{m}{2}\left[e^{-\frac{x_0}{m}} + e^{\frac{x_0}{m}}\right] \\ \beta - z_0 &= \frac{m}{2}\left[e^{\frac{\alpha - x_0}{m}} - e^{-\frac{\alpha - x_0}{m}}\right] \end{aligned}\right\} 31$$

Entre los dichos puntos tiene la catenaria una longitud dada l, luego

$$l = \frac{m}{2}\left[e^{\frac{\alpha - x_0}{m}} - e^{-\frac{\alpha - x_0}{m}} - e^{-\frac{x_0}{m}} + e^{\frac{x_0}{m}}\right] \qquad 32$$

Restando las ecuaciones 31 miembro á miembro, se elimina β. Si después de haberlas restado se suma y resta del resultado, término á término la última ecuación (32) y se multiplican entre sí las igualdades que se obtienen en estas operaciones, se halla:

$$l^2 - \beta^2 = m^2\left(e^{\frac{\alpha}{2m}} - e^{-\frac{\alpha}{2m}}\right)^2$$

de donde

$$\sqrt{l^2 - \beta^2} = m\left(e^{\frac{\alpha}{2m}} - e^{-\frac{\alpha}{2m}}\right)$$

Al extraer la raíz cuadrada sólo se toma el signo + porque α es positivo y a debe serlo también. Si se escribe $\frac{\alpha}{2m} = u$, se tendrá para determinar u, ó sea m la ecuación trascendente:

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2u}$$

Esta fórmula parece ser debida á Poisson (*). Para un valor del primer miembro mayor que uno, da la ecuación dos valores para u, iguales y de distinto signo. La solución negativa correspondería á una catenaria cuya concavidad estuviera dirigida hacia el nadir y que no puede considerarse como solución del problema, pues la tensión en el hilo correspondiente sería negativa; pero puede considerarse como solución de un problema análogo, el que plantea el caso de una catenaria cuyos elementos sean capaces de resistir á la copresión.

Desarrollando en serie el segundo miembro de la última fórmula, se tiene

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} = 1 + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} + \cdots + \frac{u^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

El segundo miembro de la ecuación anterior crece constantemente con u, tomando los valores 1 é ∞ cuando $u=0$ y $u=\infty$ respectivamente. Luego el valor del segundo miembro será una sola vez en esta variación de la variable, igual al primer miembro.

Prácticamente, para calcular u, se puede prescindir en la fórmula anterior de los términos de grado superior al cuarto, y de esta manera mediante una ecuación de segundo grado hallar los valores aproximados de u.

Conocido u, se halla fácilmente m, y conocida esta última longitud, los valores de z_0 y x_0 se calculan sin dificultad y la catenaria queda determinada por completo. Para que el problema tenga solución, es sólo menester que

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} > 1$$

lo que equivale á decir que la longitud del hilo ha de ser mayor que la de la recta que une sus extremos.

Para resolver la ecuación trascendente en u, puede procederse gráficamente, dibujando al efecto la curva

$$y = e^{u} - e^{-u}$$

(*) Traité de Mecanique Rationelle. Tomo IV.

y hallando su intersección con la recta

$$y = 2\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha}\, u$$

Evidentemente, basta dibujar la curva una sola vez para utilizarla siempre.

En los tratados de Mecánica de Broch (Berlín y Cristianía 1854) Moigno Statique, París (1868) y Duhamel París (1845) se halla calculada una tabla de valores de la función $\frac{e^{u} - e^{-u}}{u}$ para diversos valores del argumento u. He aquí como puede procederse para el cálculo de la tabla. Si se escribe

$$\frac{e^{u} + e^{-u}}{2} = \frac{1}{sen\,\delta} = \sqrt{1 + cot^2\,\delta}$$

te tendrá

$$\frac{e^{u} - e^{-u}}{2} = cot\,\delta$$

Luego

$$e^{u} = cot\,\delta + \frac{1}{sen\,\delta} = \frac{1 + cos\,\delta}{sen\,\delta} = cot\,\tfrac{1}{2}\,\delta$$

y

$$u = log\,nep\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\delta \qquad 33$$

Y la ecuación trascendente adopta la forma

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} = \frac{1}{tg\,\delta\ log\,nep\frac{1}{2}\,cot\,\frac{1}{2}\,\delta}$$

Se toman ahora, para construir la tabla, diferentes valores de δ y se calculan las funciones $tg\ \delta$, $cot\ \frac{1}{2}\ \delta$, $tg\ \delta \times log\ nep\ cot\ \frac{1}{2}\ \delta$ escribiéndose al lado de su valor el correspondiente á δ. Cuando se trata de calcular u, dados α, l y β, se empieza por calcular.

$$\frac{\alpha}{\sqrt{l^2 - \beta^2}}$$

que ha de ser igual al producto $tg\ \delta\ log\ nep\ cot\ \frac{1}{2}\ \delta$ y se busca este valor en las tablas. Hallado el de δ correspondiete, u resulta de la fórmula 33.

La coordenada y el arco de la catenaria pueden utilizarse para definir las funciones hiperbólicas (*). Así se puede escribir

$$z_1 = m\ cos\ \mathfrak{h}\ \frac{x_1}{m}$$

$$s_1 = m\ sen\ \mathfrak{h}\ \frac{x_1}{m}$$

Teniendo presente que $s_1^2 = z_1^2 - m^2$ se echa de ver que $cos^2 \mathfrak{h}\alpha - sen^2 \mathfrak{h}\alpha = 1$. De este modo la mayor parte de las propiedades geométricas de la catenaria pueden traducirse al simbolismo de estas funciones resultando otras tantas relaciones entre las mismas (**).

De las funciones $sen\ \mathfrak{h}$ y $cos\ \mathfrak{h}$ existen tablas (***). Si se dispone de una de

---

(*) Introducidas por Riccati V. Opúscula tomo I. Bolonia, 1757.

(**) Diversos autores se han ocupado de las funciones hiperbólicas. Además de los trabajos publicados por Gudermann y Günther que se enumeran en la cita siguiente que hace referencia en especial á tablas de funciones hiperbólicas, caben citar las monografías de Houel: Sur les fonctions hyperboliques, Paris, 1865; de Laisant: Essai sur les fonctions hyperboliques, Paris, 1874; Gronau, Theorie und Andwendung y der hyperbolischen Funktionen Dantzig 1865, Heis en la nota adicionada al conjunto de Problemas de cálculo infinitesimal de Sohntke, Mansion Précis de la theorie des Fonctions Hyperboliques. Paris 1906. etc.

(***) Gudermann: Crelle, Journal für reine und andgewandte Mathematik, tomos VI, VII, VIII y IX. Gronau Tafeln für den hiperbolischen Sektoren und fur den Logaritmen ihren Sinus und Cosinus. Dantzig 1862.—Houel Recueil de formules et de Tables numeriques, 1866. — Günther: die Lehre von Hiperbelfunctionen, Halle, 1881. — Forti: Tavole di funzione hiperboliche, Roma, 1892.—Blakesley Tables on hiperbolic sines and cosines, Londres. — Hütte Taschenbuch des Ingenieurs, Berlin (XX^a edición). — Ligowsky Tafelu der Hiperbelfunktionen und des Kreisfunktionen, Berlin, 1890. —Burrau Kreis und Hiperbelfunktionen tafeln, Berlin, 1907. — Jahnke Fubktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig, 1909. — Taschenbuch für Mathematiken und Physiker, Leipzig, 1909. Becker and Ostrand Hyperbolic functions. Londres (Smithsonian Mathematical tables), etc.

se facilita el cálculo del parámetro m ya que la ecuación trascendente en u, se puede escribir

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} = \frac{sen\ \mathfrak{h}\ (u)}{u}$$

También queda determinada una catenaria por las condiciones siguientes: *la de tener una recta dada por directriz, pasar por un punto dado de coordenadas a y b y ser en él tangente á una recta dada* (*).

Supongamos que la directriz es el eje x, y que k es el coeficiente angular de la recta dada. Se tendrán, como condiciones para determinar las constantes m y x_o, las siguientes:

$$b = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{a - x_o}{m}} + e^{-\frac{a - x_o}{m}}\right)$$

$$k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{a,\,b} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a - x_o}{m}} - e^{-\frac{a - x_o}{m}}\right)$$

Si se escribe, para abreviar,

$$e^{\frac{a - x_o}{m}} = u\ ,$$

las dos condiciones anteriores adoptan la forma:

$$b = \frac{m}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

$$k = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

(*) Mac Neish en los Annals of Mathematics, tomo VII, 1905, se ocupa de lo envolvente de las catenarias que pasan por un punto y tienen una recta dada por directriz,

y eliminando u entre ellas, queda

$$b = m\sqrt{1 + k^2}$$

Si $k = tg\,\alpha$

$$m = b\cos\alpha$$

Determinado el valor de m mediante la última igualdad, el valor de x_o resulta de la siguiente

$$\frac{a - x_o}{m} = loguep\ u$$

La solución es, por consiguiente, única.

Si se dan dos puntos por los cuales deba pasar la catenaria con una recta dada (el eje de las x) *por directriz,* el problema puede resolverse del modo que á continuación se indica (*).

Supongamos, en primer lugar, que los dos puntos estén á igual altura sobre el eje x, y sean a y b sus coordenadas. La ecuación de la catenaria será

$$z = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

con la condición de que

$$b = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{a}{m}} + e^{-\frac{a}{m}}\right) = \Phi\,(m)$$

que es la que determina el valor del parámetro m.

(*) V. Hanccock Lectures on the Calculus of variations. Cincinati, 1904 y Hadamard Leçons sur le Calcul des Variations, Paris, 1910.

Quien por primera vez se ocupó de este problema, parece haber sido Goldschmidt en su Determinatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortae Göttinguen 1831.

Para que el valor de m dado por la última ecuación sea solución del problema, es preciso que sea real y positivo.

Ahora bien

$$\Phi(o) = \infty \quad \text{y} \quad \Phi(\infty) = \infty$$

siendo

$$\Phi'(m) = \frac{d\,\Phi(m)}{dm} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{m}} + e^{-\frac{a}{m}}\right) - \frac{a}{m}\left(e^{\frac{a}{m}} - e^{-\frac{a}{m}}\right)$$

La derivada es tal, que

$$\Phi'(o) = -\infty \quad y \quad \Phi'(\infty) = 1$$

cambiando de signo una sola vez entre los valores o é ∞ de m. Este cambio de signo ó anulación de Φ' corresponde á un mínimo de $\Phi(m)$. Sea μ el valor de m que anula $\Phi'(m)$. Si

$$\mu < b \quad \textit{habrá dos soluciones}$$
$$\mu = b \quad \text{»} \quad \textit{una solución}$$
$$\mu > b \quad \textit{no habrá} \quad \text{»}$$

del problema puesto que m ordenada del vértice de la catenaria, es siempre menor que otra ordenada cualquiera tal como b.

El valor de $\frac{a}{m}$, raíz de $\Phi'(m)$ es

$$\frac{a}{m} = 1{,}19968\ldots$$

Con este valor, el de $\frac{b}{m}$ resulta ser

$$1{,}81017$$

y, por lo tanto

$$\frac{b}{a} = 1.50888 = tg\ 56^{\circ}\ 28'$$

Las condiciones anteriores para la existencia de una solución pueden enunciarse diciendo que habrá dos soluciones una ó ninguna según que $\frac{b}{a}$ sea mayor, igual ó menor que 1,50888.

Las tangentes á la catenaria trazadas por el origen forman con el eje x ángulos iguales á 56° 28' y á su suplemento. Por tanto, para que exista solución es preciso que los puntos dados se hallen dentro del ángulo comprendido entre las dos citadas tangentes, cuyos puntos de contacto con la catenaria tienen las siguientes coordenadas

$$x_1 = \pm\ 1.19968 \times m$$

$$z_1 = 1.81017 \times m$$

Vamos ahora á considerar el caso más general en que los puntos dados no están á igual altura respecto de la directriz. Sean $\underline{a}$ y $\underline{b}$, $\underline{c}$ y $\underline{d}$, las coordenadas de los puntos dados, que supondremos tales que $d > b$ y $c > a$. Si siendo $d > b, c$ fuera menor que a, bastaría invertir el sentido del eje de las x para reducir este caso al anterior.

Por pasar la catenaria

$$y = \frac{m}{2}\left[e^{\frac{x - x_0}{m}} + e^{-\frac{x - x_0}{m}}\right]$$

por el punto a, b, se tiene

$$b = \frac{m}{2}\left[e^{\frac{a - x_0}{m}} + e^{-\frac{a - x_0}{m}}\right]$$

de lo cual se deduce:

$$\sqrt{b^2 - m^2} = \pm \frac{m}{2} \left[e^{\frac{a - x_o}{m}} - e^{-\frac{a - x_o}{m}} \right]$$

siendo el signo del radical el + ó el — según que $a - x_o$ sea positiva ó negativa. De la última igualdad se deduce

$$\frac{a - x_o}{m} = \pm \log nep \frac{b + \sqrt{b^2 - m^2}}{m}$$

De un modo análogo, por pasar la curva por el punto de coordenadas c y d, se tiene

$$\frac{c - x_o}{m} = \pm \log nep \frac{d + \sqrt{d^2 - m^2}}{m}$$

El signo — que precede al segundo miembro de la última igualdad es inadmisible. En efecto, el signo — correspondería á $c - x_o$ negativo, es decir á $x_o > c$. Y, como que $c > a$, se tendría

$$x_o > c > a \quad .$$

Pero la ordenada que corresponde á la abcisa x_o es el parámetro m que es la ordenada mínima. Y, como $b > d$ el trozo de catenaria comprendido entre (a, b) y $(x_o\ m)$ sería cóncavo hacia el eje x, lo cual es inadmisible.

En consecuencia, las dos ecuaciones de condición que impone el problema son

$$\frac{a - x_o}{m} = \pm \log nep \frac{b + \sqrt{b^2 - m^2}}{m} \qquad 34$$

$$\frac{c - x_o}{m} = + \log nep \frac{d + \sqrt{d^2 - m^2}}{m} \qquad 35$$

de las cuales, eliminando x_0 entre ellas se llega á las dos siguientes, una que corresponde al signo + de la (34) y otra al —

$$\frac{a-c}{m} + log\ nep\ \frac{b+\sqrt{b^2-m^2}}{d+\sqrt{d^2-m^2}} = f_1(m) = o$$

$$\frac{a-c}{m} + log\ nep\ (b+\sqrt{b^2-m^2})(d+\sqrt{d^2-m^2}) = f_2(m) = o$$

Las soluciones del problema corresponderán á las raíces de las ecuaciones anteriores.

Se tiene

$$f_1(o) = -\infty\ ;\quad f_1(b) = log\ nep\ \frac{b}{d+\sqrt{d^2-b^2}} - \frac{c-a}{b}\ ;$$

y, como quiera que $f'_1(m)$ es positiva en el intervalo o—b, la función $f_1(m)$ es constantemente creciente en el intervalo. Ahora bien, el valor de la raíz m de $f_1(m) = o$ ha de ser menor que b, luego podemos afirmar que si

$$f_1(b) < o$$

la ecuación $f_1(m) = o$ no da solución aceptable. Si

$$f_1(b) = o$$

habrá la solución $m = b$, y si

$$f_1(b) > o$$

habrá una raíz aceptable menor que b.

Es de observar que si

$$f_1(b) < o$$

en la catenaria cuyo parámetro es b que pasa por el punto (a, b) que constituye su vértice, el punto (c, d) se halla fuera de la catenaria, y si

$$f_1(b) = o$$

se halla en la misma, al paso que si

$$f_1(b) > o$$

se halla dentro.

La función $f_2(m)$ que es igual á ∞ para $m = o$, es tal que $f_2(m)$ se anula para un valor de m comprendido entre o y b. En efecto, para $m = o$, $f'_2(m)$ es negativa, y para $m = b$ es igual á $+\infty$. La anulación de $f'_2(m)$ sólo tiene lugar una vez en este intérvalo, puesto que, siendo

$$f_2'(m) = -\frac{1}{m^2}\left[\frac{dm}{\sqrt{d^2 - m^2}} + \frac{bm}{\sqrt{b^2 - m^2}} - (c - a)\right]$$

la cantidad $\sqrt{\frac{b^2}{m^2} - 1}$ decrece constantemente, y por lo tanto $\frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{m^2} - 1}}$ crece constantemente.

Si se llama μ al valor de m que hace máximo á $f_2(m)$, y que satisface á la ecuación

$$f_2'(\mu) = o = \frac{d\mu}{\sqrt{d^2 - \mu^2}} + \frac{b\mu}{\sqrt{b^2 - \mu^2}} - (c - a),$$

resulta evidente, que si

$$f_2(\mu) < o$$

no hay solución aceptable. Si

$$f_2(\mu) = o,$$

habrá la solución $m = \mu$, y habrá dos ó una solución, según que, siendo

$$f_2(\mu) > o \quad ,$$

se verifique α):

$$\text{que} \qquad f_2(b) < o$$

ó β) :

$$\text{que} \qquad f_2(b) > o$$

En el caso α) la ecuación $f_1(m) = o$ no da solución aceptable, y en el β) una solución. Si $f_1(b) = o$ existe siempre una solución de $f_2(m) = o$

En resumen,

si	$f_2(\mu) < o$	no hay soluciones aceptables,
si	$f_2(\mu) = o$	hay una solución $\mu = m$,
si	$f_2(\mu) > o$	hay dos soluciones

las cuales pueden provenir de $f_2(m) = o$ ó una de $f_2(m) = o$ y otra de $f_1(m) = o$.

Si $f_2(\mu) = o$ las tangentes á la catenaria única solución del problema, en los puntos dados se cortan en un punto del eje de las x En efecto, la ecuación

$$f_2'(\mu) = o$$

expresa que la suma de las subtangentes

$$\frac{b\,\mu}{\sqrt{b^2 - \mu^2}} \quad y \quad \frac{d\,\mu}{\sqrt{d^2 - \mu^2}}$$

es igual á c-a.

Cuando $f_2(\mu) > o$, si $f_2(b) \lesseqgtr o$, en cuyo caso $f_2(m) = o$ tiene dos raíces que convienen al problema, la menor, comprendida entre o y μ corresponde á una catenaria cuyas tangentes se cortan en un punto situado debajo del eje x, y la ma-

yor, comprendida entre μ y b, da lugar á una catenaria cuyas tangentes se cortan encima de la base. Si $f_2(b) > o$, las tangentes correspondientes á la raíz m_1 de $f_2(m) = o$ se cortan debajo, las correspondientes á la raíz de $f_1(m) = o$ encima de la base (*).

Si en una catenaria se traza en un punto P la tangente, y por el punto en que ésta corta á la base se traza otra, siendo P' el nuevo punto de contacto, los puntos P y P' se llaman conjugados, y son tales, que el área de la superficie engendrada por la rotación alrededor de la base del fragmento de catenaria entre ellos comprendida, es igual á la suma de los areas laterales de los conos de revolución engendrados por la rotación de las tangentes alrededor de la base. En efecto, las coordenadas $(a\ b)$ y $(c\ d)$ de los puntos P y P' satisfacen á ó ecuación.

$$\frac{bm}{\sqrt{b^2 - m^2}} + \frac{dm}{\sqrt{d^2 - m^2}} = c - a \qquad 36$$

que, como ya hemos hecho observar, expresa que la suma de las subtangentes es igual á c-a. Pero la suma de las áreas laterales de los citados conos, vale

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 - m^2}}\ \pi\, b^2 + \frac{d}{\sqrt{d^2 - m^2}}\ \pi\, d^2 \qquad 37$$

y la de la superficie engendrada por la revolución del fragmento de catenaria, vale

$$2\pi \int_a^c y\, ds = \frac{2\pi}{m} \int_a^c y^2\, dx = \pi \left[\pm\, y \sqrt{y^2 - m^2} + m\, x \right]_a^c$$

$$= \pi \left[d \sqrt{d^2 - m^2} + b \sqrt{b^2 - m^2} + m\,(c - a) \right]$$

la cual, en virtud de la ecuación 36 es igual á la suma (37).

De esta propiedad de la catenaria conocida con el nombre de teorema de *Lindelöff* dedúcense importantes consecuencias. *La catenaria es la curva que pasando por dos puntos dados engendra al girar alrededor de una recta dada la superficie de área mínima,* como demostraremos luego (**), mas ya de lo que lle-

(*) V. Lindelöff Moigno. Calcul de Variations, y Lindelöff Mathematische Annalen, 1870.
(**) V. la nota II.

vamos dicho se desprende que es necesario que en el fragmento de catenaria ó catenarias soluciones del problema de superficie mínima de revolución, no existan puntos conjugados. Porque entonces habrá infinitas curvas distintas de la catenaria que darán superficies de igual área, entre ellas, las compuestas por dos trozos de catenaria que comprendan desde los extremos á un par de puntos conjugados, y por las dos tangentes á la catenaria en los puntos conjugados. Si los puntos dados fueren conjugados, habría, por lo menos, una. Y como en estas curvas la variación de la integral $\int y\,ds$ no es nula, puesto que no son extremales, no cumplen con las condiciones de máximo ó mínimo. Por lo tanto, el fragmento de catenaria que contiene puntos conjugados no da la solución del problema de superficie mínima.

Sean dos anillos circulares cuyos planos paralelos son perpendiculares á la recta que une sus centros.

Supongamos que mediante una disolución de jabón se ha formado una membrana entre los dos anillos.

La forma exterior será la de un trozo de catenoide ó superficie engendrada por la rotación de una catenaria alrededor de la base que es en este caso la recta eje de simetría que une los centros de los círculos. La superficie formada será estable cuando la energía potencial medida por el área del fragmento de catenoide sea mínima, según se demuestra en la teoría de la Capilaridad, lo cual, como hemos visto, implica que en el trozo de curva meridiana comprendido entre los anillos no existan puntos conjugados.

Si se aumentara la distancia que separa los dos anillos, llegaría un momento que la membrana de disolución de jabón se rasgaría, es el momento en que los dos extremos de la curva meridiana son puntos conjugados. El catenoide degenera entonces en dos planos, los de los anillos, que corresponden á las soluciones discontinuas del problema (*).

La circunstancia de que las catenarias dependen de un solo parámetro nos dice que *todas ellas son curvas semejantes.*

La propiedad de que el parámetro es sólo función de

$$\frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a}$$

(*) V. Nota II.

cuando se dan la longitud y las coordenadas (a, b) y (o, o) de los extremos, conduce á la siguiente propiedad descubierta por Möbius (*). *Sean una serie de rectas que unan uno de los extremos o con los distintos puntos a, b, c y d de una vertical MN. Si las longitudes de las rectas oa, ob, oc y od representan longitudes de diversos hilos, y el punto o extremo común de todos ellos se aproxima á la recta MN según la perpendicular o P, los diversos hilos formarán catenarias iguales,* puesto que sus parámetros serán iguales é iguales á:

$$\frac{o\ P}{o'\ P}$$

siendo o' la nueva posición de o y P el pie de la perpendicular de o á MN. En efecto se tiene

$$o\ P = \sqrt{l^2 - b^2}$$

$$o'\ P = a$$

Además, *los vértices de las distintas catenarias están situados en una catenaria igual á las anteriores é invertida.* Esta propiedad es consecuencia de que si en cualquier catenaria se traza una cuerda que pase por el vértice, y se construye la figura simétrica de la curva respecto de dicha cuerda prolongada en ambos sentidos, se halla otra catenaria igual, en que el vértice es el otro extremo de la cuerda que no es el vértice de la curva primera.

De las ecuaciones intrínsecas se deducen algunas propiedades interesantes. Se tiene

$$\frac{dl}{ds} = -\ p\ sen\ \alpha$$

$$\frac{T}{\rho} = p\ cos\ \alpha$$

siendo α el ángulo que la tangente á la curva forma con el eje x.

(*) Lehrbuch der Statik, Leipzig.

Por otra parte, tomando una porción cualquiera 1—2 de catenaria y llamando s á la longitud del arco comprendido entre los puntos 1 y 2, se tiene expresado que hay equilibrio entre las fuerzas aplicadas al mismo.

$$T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 = o \qquad 37$$

$$T_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - T_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = ps \qquad 38$$

La primera de las ecuaciones últimas expresa que

$$T \cos \alpha = T_o \qquad 39$$

siendo T_o la tensión en el vértice en que la tangente es horizontal. En virtud de esta propiedad, la segunda de las intrínsecas se podrá escribir

$$\bar{\rho} \cos^2 \alpha = \frac{T_o}{p}$$

El segundo miembro es igual al parámetro m, ya que de

$$T = pz$$

se deduce haciendo $T = T_o$ y $z = m$,

$$m = \frac{T_o}{p}$$

En consecuencia

$$\bar{\rho} \cos^2 \alpha = m \qquad 40$$

Por lo tanto, *proyectando el radio de curvatura sobre el eje y la proyección sobre la normal, el resultado es el parámetro.* Y, vice versa, dado el parámetro, se puede construir el radio de curvatura por las operaciones inversas.

De la ecuación 40 se deduce que la *radial de la catenaria es la campila de Eudoxio* (*). Llámase radial á la curva lugar geométrico de los extremos de ra-

(*) Loria Algebraische und Trescendente Curven der Ebene. Leipzig 1902.

dios vectores trazados por un punto paralelamente é iguales á los radios de curvatura de una curva dada. La campila, cuya ecuación en coordenadas polares es

$$\rho \cos^2 \theta = a$$

fué ideada por Eudoxio para resolver en el plano el problema délico ó de la duplicación del cubo, del cual Arquitas de Tarento, maestro de Eudoxio, había dado una solución geométrica aproximada.

La ecuación 38 da

$$T \operatorname{sen} \alpha = p\, s$$

Dividiendo miembro á miembro esta igualdad por la 39, queda

$$tg\ \alpha = \frac{s}{m} \qquad 41$$

propiedad que resulta también al considerar á la catenaria como polígono funicular de un sistema de fuerzas paralelas é iguales á *pds*. Eliminando α entre esta ecuación y 40, se llega á la siguiente relación entre ρ y s

$$s^2 = \bar{\rho}\, m - m^2$$

De la que se deduce que, *si una catenaria rueda sobre una recta, el lugar geométrico de los centros de una curvatura correspondientes á los puntos de contacto es una parábola cuyo eje es perpendicular á la citada recta.*

De la igualdad 41 se deduce que si se tienen dos tangentes perpendiculares, para las que

$$tg\ \alpha_1 + tg\ \alpha_2 = -1$$

se podrá escribir

$$s_1\, s_2 + m^2 = 0$$

ó sea

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{m}$$

de las cuales se deduce: 1.º *Que en todo ángulo recto que envuelve á una catenaria, es constante el producto de los arcos que van del vértice á los puntos de contacto; 2.º la suma de las curvaturas en los puntos de contacto es constante é igual á la del vértice.*

De las ecuaciones 39 y 40 se deduce que

$$\rho = m \frac{T^2}{T_o^2}$$

es decir, que el *radio de curvatura es proporcional al cuadrado de la tensión.* En el vértice en que $T = T_o$, el radio de curvatura es igual al parámetro.

De la ecuación 39 y de la que expresa que $T \operatorname{sen} \alpha = ps$ se deduce

$$T^2 = T_o^2 + (ps)^2$$

De las 39 y 40, dividiéndolas,

$$\frac{T}{\rho \cos \alpha} = \frac{T_o}{m} = p$$

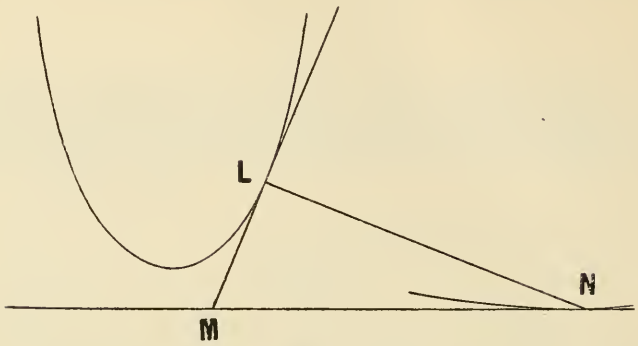
y recordando que $T = pz$,

$$z = \rho \cos \alpha$$

Así es que, *la proyección del radio de curvatura sobre el eje es igual á la ordenada, luego el radio de curvatura es igual á la normal.*

De esta última propiedad se deducen consecuencias interesantes. En primer lugar, vamos á demostrar que *si una parábola rueda sobre una de las tangentes su foco describe una catenaria.* Para demostrarlo resolveremos el siguiente problema: Hallar la curva que al rodar sobre una recta tiene la propiedad de que un punto de su plano describe un catenaria.

Refiriendo la curva que se busca á coordenadas polares con centro en el



(Fig. 4)

punto generador, es de observar (fig. 4.ª) que la tangente del ángulo que forma el radio vector ρ con la tangente viene dada por

$$tg\ LNM = tg\ \theta = \frac{\rho\, d\varphi}{d\rho}$$

siendo φ el ángulo polar. Ahora bien, por otra parte, y como indica la figura (4)

$$LNM = \theta = 90 - LMN = 90 - \alpha$$

luego, teniendo presente la ecuación (40) y la circunstancia de que el radio de curvatura es igual á la normal,

$$tg\ \theta = cot\ \alpha = \frac{\sqrt{\rho - m_o}}{\sqrt{m_o}}$$

Por consiguiente, la ecuación diferencial de la curva que se busca es

$$\frac{\rho\, d\varphi}{d\rho} = \frac{\sqrt{\rho - m^o}}{\sqrt{m_o}}$$

Poniendo $\frac{1}{\rho} = u$, se tiene entre u y φ la siguiente relación

$$\frac{du}{d\varphi} + \sqrt{\frac{u}{m_o} - u^2} = o$$

Derivando respecto á φ, queda

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{2m_o} = o$$

de lo cual se deduce, integrando,

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2m_o} = A \cos(\varphi - \varphi_o)$$

Para $\varphi = \varphi_o$, $\frac{1}{\rho}$ es máximo, y por lo tanto ρ es mínimo y vale m.
Luego

$$A = \frac{1}{2m}$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2m}\left(1 + \cos(\varphi - \varphi_o)\right)$$

que es la ecuación polar de una parábola en que $2m$ es el parámetro.

Otra propiedad interesante, fundada en que el radio de curvatura es igual á la normal es la siguiente: *Al rodar una catenaria sobre una tangente la base pasa por un punto fijo.* En efecto, la circunferencia de los retrocesos (*) en este caso es tal, que su diámetro es igual á la normal, luego la base pasa siempre por el extremo de este diámetro que no es centro instantáneo. Por lo tanto el punto P donde la perpendicular á la base trazada por el centro instantáneo encuentra á la circunferencia de retrocesos está situado sobre la base. Y, como el radio de

(*) Véase para la definición y propiedades de esta circunferencia, un tratado de Cinemática, v. g. los de Kœnigs, Paris (1897); Schönflies, Leipzig (1886); Ruiz Castizo, Madrid (1908), etc.

curvatura de la envolvente de la base es igual á la distancia de P á la misma, siendo esta distancia nula, la envolvente es un punto, evidentemente el de intersección del eje con la dicha base.

De la ecuación 39 se deduce, además, poniendo en vez de T, su igual pz, y multiplicando por ds,

$$z \cos \varphi \, ds = m ds$$

ó sea, integrando

$$\int z \, dx = ms$$

la cual expresa que el área comprendida entre la curva, la base y dos ordenadas extremas es proporcional al arco.

Del equilibrio de una porción cualquiera de catenaria por las tensiones extremas y el peso aplicado en el centro de gravedad del arco, se deduce *que las tangentes en los extremos de un arco se cortan en la vertical del centro de gravedad del mismo.*

De la ecuación 39 se deducen algunas otras consecuencias dignas de interés. Así, por ejemplo, si en un punto cualquiera de una catenaria se suspende un peso P, se forman á uno y otro lado de la vertical que pasa por aquél, *dos catenarias que puedan considerarse como fragmentos de una misma*, ya que considerando el equilibrio del peso P con las tensiones á uno y otro lado del punto donde obra P, y llamando T_1 y T_2 á éstas así como α_1 y φ_2 los ángulos de las respectivas tangentes con el horizonte, se tendrá

$$T_1 \cos \varphi_1 = T_2 \cos \varphi_2$$

y por tanto, si T_{10} y T_{20} representan las tensiones en los vértices de las correspondientes catenarias

$$T_{10} = T_{20}$$

de donde resulta que tienen igual parámetro (*).

(*) Para el caso en que se aplica en un punto de una catenaria una fuerza P, véase la determinación de los constantes en Tous. l. c.

Una cosa análoga puede afirmarse si se suspende el peso P de un anillo que pueda deslizar á lo largo de la catenaria. En este caso para conocer la posición de equilibrio del anillo, es decir, las coordenadas x' y z' del mismo, se podrá partir de la ecuación más general de la catenaria con las tres constantes x_o, z_o y m, y se expresará que cada una de las dos catenarias parciales (1) y (2) que se forman y que tienen igual parámetro m, pasa por el punto x' z' y por aquel á que va sujeta. Se tendrán así para determinar las siete incógnitas $(x_o\ z_o)_1$ $(x_o\ z_o)_2$ x', z' y m cuatro ecuaciones á las que pueden añadirse otras tres expresando que las fuerzas que obran sobre el anillo proyectadas verticalmente, se equilibran, que la suma de las longitudes comprendidas entre los puntos de suspensión y x' z' es una cantidad dada, y que las tensiones en los puntos de suspensión equilibran al peso P, ó dicho de otro modo, que sus direcciones concurren en un punto de la vertical que pasa por P.

La propiedad de que la tensión en los extremos equivale al peso de una longitud de catenaria igual á la distancia del extremo á la base, conduce á la consecuencia que se indica á continuación: *Si se dispone un hilo pesado y cerrado sobre dos poleas sumamente pequeñas, se formarán dos catenarias de igual base,* puesto que la tensión en los puntos de suspensión comunes es igual. No tendrán igual parámetro porque en los puntos de suspensión no serán, en general, iguales los ángulos de las tangentes con la directriz Para determinarlos bastará escribir la ecuación más general de la catenaria que contiene tres constantes $(x_o)_1$, $(z_o)_1$ (m_1) y que convendrá á una de ellas, y otra ecuación análoga con las constantes $(x_o)_2$ $(z_o)_2$ y m_2 y determinar las 6 constantes con las cuatro condiciones que resultan de expresar que pasan por los dos puntos de suspensión más la de que la longitud total suma de las longitudes de las catenarias es conocida, mas la siguiente relación entre las constantes:

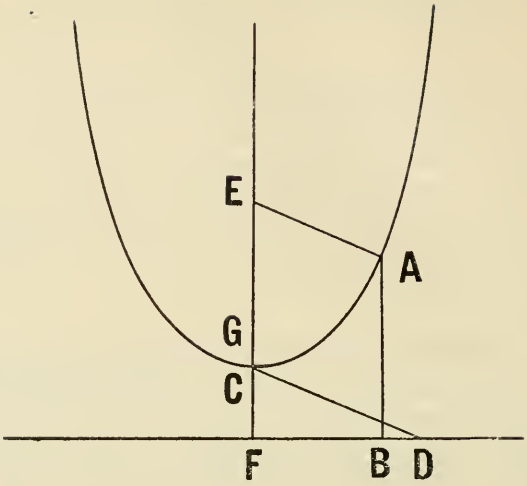
$$(z_o)_1 = (z_o)_2 + h$$

siendo h la diferencia de nivel entre las poleas.

El centro de gravedad (ξ, η) de un arco l de catenaria, contando á partir del vértice y cuyo otro extremo A tiene por coordenadas x y z, viene dado por las fórmulas (*)

$$\xi = x - \frac{m\,(z - m)}{l}\ ,\quad \eta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{m\,x}{l}\right)$$

(*) Leibnitz fué quien calculó por primera vez el centro de gravedad de un arco, así como el del areo comprendida entre la curva, la base, la ordenada mínima y otra ordenada cualquiera, demostrando que el centro de gravedad de uno y otra están en la misma vertical, siendo la ordenada del de ésta, igual á la mitad de la ordenada del c. d. g. del arco.



(Fig. 5)

La abcisa ξ es la del punto de intersección de las tangentes extremas. La ordenada η se puede construir gráficamente tomando á partir del vértice una longitud CD igual á la ordenada AB del extremo A, siendo D un punto de la base y trazando luego por A la paralela AE á DC. Si E es el punto de intersección de AE con el eje, la ordenada del centro de gravedad es $FG = \frac{1}{2} FE$ siendo F el punto de intersección del eje con la base.

La catenaria se puede construir gráficamente mediante las dos curvas longarítmicas (*).

$$z_1 = m\, e^{\frac{x}{m}}$$

$$z_2 = m\, e^{-\frac{x}{m}}$$

(*) V. Vargas Aguirre, Catálogo de curvas planas, Madrid, 1908.

La construcción de la catenaria mediante la logarítmica, es debida á Leibnitz. Juan Bernoulli, utilizaba el resultado supuesto conocido de la cuadratura de la hipérbola ó rectificación de la parabola.

puesto que

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

También puede utilizarse la propiedad de ser el radio de curvatura igual á la normal para dibujarle como envolvente de sus círculos osculadores.

En algunas de las aplicaciones de la catenaria se substituye por una curva algébrica, parabólica generalmente. La curva de segundo orden que en las inmediaciones del vértice se aproxima más á la catenaria es la elipse osculadora en el vértice, según hace notar d'Ocagne (*).

Desarrollando en serie las exponenciales $e^{\frac{x}{m}}$ y $e^{-\frac{x}{m}}$ se tendrá la ecuación de la catenaria

$$z = m + \frac{1}{m}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{m^3}\,\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{m^5}\,\frac{x^6}{6!} + \cdots$$

En las aplicaciones á la Telegrafía se suele tomar aproximadamente

$$z = m + \frac{1}{m}\,\frac{x^2}{2}$$

que representa una parábola de segundo grado. Los elementos más importantes son la flecha, la luz ó distancia entre los postes de apoyo, la tensión en el punto más bajo, las tensiones en los extremos de apoyo y la longitud. La flecha se define como la máxima separación vertical entre la parábola anterior y la cuerda que une los puntos de apoyo de la línea telegráfica.

Cuando los dos extremos están á la misma altura, se tienen "rigurosamente" las siguientes relaciones, en las que f representa la flecha y φ el ángulo de las tangentes extremas con el horizonte:

(*) Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid, 1909.

$$\frac{T_o}{p} = m = \frac{1}{2f}\left[\frac{1}{4}l^2 - f^2\right]$$

$$\frac{T_o}{p} = m = \frac{1}{2}\, l \cot \varphi$$

$$\frac{T_o}{p} = m = \frac{f \cos \varphi}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\varphi}$$

Cuando se substituye la catenaria por una parábola de segundo grado, se tienen las fórmulas aproximadas siguientes, de utilidad en las aplicaciones, y en las que a designa la luz, y T, la tensión en los apoyos

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_o}{p} &= m = \frac{a^2}{8f} \\ T_1 &= \frac{T_o}{\cos \varphi} = T_o + p\, f \\ \frac{T_o}{p} &= m = \sqrt{\frac{a^3}{24\,(l - a)}} \end{aligned}\right\} 42$$

las cuales permiten resolver todos los problemas que presenta la instalación de hilos telegráficos ó telefónicos, incluso los de calcular las variaciones en la tensión ú otros elementos producidos por una variación de temperatura $(t - t_o)^o$, que hará aumentar la longitud en $\alpha\,(t - t_o)\,l$ si l es la longitud á $t_o{}^o$, ó por sobrecargas como la de la nieve, que harán variar el valor de p, y aun permiten calcular la influencia de la variación de longitud y de la tensión, suponiendo el hilo alargable, cuya variación de longitud puede ser motivada por una variación en la temperatura. En efecto, llamando T_o' á la tensión en el punto más bajo cuando la temperatura del hilo pasa de t_o á t y l' á la longitud correspondiente, se tendrá aproximadamente:

$$l' = l\,(1 + \alpha\,(t - t_o)\left(\left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\,(T_o' - T_o)\right)\right.$$

siendo α el coeficiente de dilatación calorífica, ε el de dilatación elástica lineal, y s la sección. Introduciendo en la última de las fórmulas 42 en vez de l, su nuevo valor l', y en vez de T_o, T_o', se halla una relación aproximada entre T_o' y t. Conocido el nuevo valor de T_o' la primera de las ecuaciones 42 puede servir para determinar la flecha, y la segunda podrá dar á conocer el valor de la tensión máxima.

Cuando los dos extremos no se hallan al mismo nivel, se puede considerar el arco de catenaria como diferencia entre dos. Si el punto C de la catenaria, en que la tangente es horizontal tiene su abcisa comprendida entre las abcisas de los puntos de apoyo, llamando $\frac{a'}{2}$ á la diferencia entre la abcisa de este punto y la del apoyo más bajo, $\frac{a}{2}$ á la diferencia entre la abcisa del apoyo más alto y la de C, d á la luz,

$$d = \frac{a + a'}{2} \quad ,$$

f y f' á las diferencias de nivel entre los apoyos y el punto C y h á la conocida entre los apoyos,

$$h = f - f' ,$$

se tiene:

$$a = d + \frac{2h}{d} m = d + \frac{2h}{d} \frac{T_o}{p}$$

$$a' = d - \frac{2h}{d} m = d - \frac{2h}{d} \frac{T_o}{p}$$

Conocidos a y a' los valores de f y f' son

$$f = \frac{a^2}{8m} \quad ; \quad f' = \frac{a'^2}{8m};$$

La longitud total del hilo es:

$$l = \frac{a + a'}{2} + \frac{a^3 + a'^3}{48\, m^2}$$

Si el punto C estuviere colocado de tal modo que su abcisa fuere mayor ó menor que las de los puntos de apoyo, una de las cantidades a ó a' sería negativa.

Para conocer la flecha en este caso podrá dibujarse gráficamente la parábola que substituye á la catenaria, trazarle una tangente paralela á la recta de unión de los apoyos y medir la distancia entre ambas tangentes. Por lo tanto, dentro del orden de aproximación convenido, la flecha definida como la máxima separación vertical entre el arco y la cuerda, pasa por el punto medio de aquella cuerda de unión. Su valor f_i es, evidentemente

$$f_i = \frac{m}{2} + f - f'$$

ó sea

$$f_i = \frac{d^2}{8\,m} = \frac{d^2\,p}{8\,T_o}$$

De esta fórmula resulta que la flecha no depende de la inclinación de la línea. Admitiendo, para un mismo metal un valor determinado σ para la tensión por unidad de superficie y llamando d á su densidad,

$$f_i = \frac{d^2\,\sigma}{8\delta}$$

La flecha es, por lo tanto, independiente del diámetro del hilo (*).

La catenaria se encuentra en el estudio de las bóvedas, según Rayleigh (**) es la trayectoria de un rayo sonoro al propagarse en la atmósfera, y según Finsterwalder (***) es la catacáustica de una logarítmica $y = a\ log\ \frac{x}{a}$ cuando los rayos inciden paralelamente al eje x.

Galileo Galilei en la segunda "Giornata" de sus famosos "Discorsi é dimostrazioni matematiche intorno á due nuove scienze" (1), hace notar que la forma de un hilo flexible y pesado suspendido por sus extremos es semejante á

(*) Pillonel, Schweizerische Elektrotechnische Zeitschrift, 1906.
(**) Lord Rayleigh Theory of Sound, tomo II. Lóndres, 1896.
(***) Loria l. c.
(1) Otswaldt's Klassiker, asi como las obras completas de Galileo, Florencia, 1855.

una parábola, y da como medio de trazar esta curva el de seguir la del hilo (1). Algunos matemáticos (2) han creído ver en ello una equivocación de Galileo (3), pero otros siguiendo á Venturoli opinan que no se trata de una equivocación de Galileo, sino simplemente de que este quiso indicar que la curva que hoy llamamos catenaria (*) es parecida á una parábola (**).

Joaquín Jung, tomando al pie de la letra las palabras de Galileo, demostró por el cálculo y la experimentación, siguiendo las indicaciones de Leibnitz, que la catenaria no podía ser una curva algébrica de segundo orden.

A Jaime Bernoulli cabe la gloria de haber propuesto á los matemáticos de su tiempo la determinación analítica de la curva de equilibrio de un hilo flexible y pesado (***). Resolvieron el problema Huyghens (1), Leibnitz y Juan Bernoulli (2), los cuales descubrieron algunas de las propiedades de la curva que publicaron sin demostración como era á la sazón costumbre. David Gregory fué quien publicó las demostraciones de algunas de ellas (3) y Juan Bernouilli hizo lo propio al publicar sus "Lectiones mathematicae de methodo Integralium" (4), incluídas en la edición de sus obras completas.

Una vez resuelta la naturaleza de la catenaria, Jaime Bernoulli cayó en la cuenta de que la forma de la misma era la de la sección recta de una vela rectangular hinchada por el viento y sostenida por dos mástiles paralelos en el caso en que la acción de aquél sea proporcional á la extensión de la superficie de la vela normal á su dirección y se ejerza normalmente á la superficie. Mas

---

(1) Rosenberger Geschichte der Physik Bruswick, 1884.

(2) Juan Bernoulli hablando de ello dice: Primus qui de esta curva á filo, vel potius catenula quæe non est extensibilis libere pendente forma cogitavit, fuit Galileus; natura autem ejus non penetravit, utpote qui parabolam esse statuit quæ tamen minimæ est.

(3) Cantor Geschichte der Mathematik, tomo II. Leipzig, 1900, y Montucla, Histoire des Mathématiques, p. 468.

(*) Nombre debido á Huyghens; véase la carta del mismo á Leibnitz del 18 de Noviembre de 1690. (Edición Gerhardt de las obras de Leibnitz, tomo II, pág, 56).

(**) Venturoli. Elements of Mathematics, pág. 69.

(***) Acta eruditorum, Leipzig, 1691.

(1) Korteweg. La solution de Huyghens du probleme de la Chainette. Biblioteca matematica 3.ª serie. La siguiente propiedad de la catenaria es debida á Huyghens: El área engendrada por la rotación de un arco s, uno de cuyos extremos es el vértice, al rededor del eje de las z, es igual al área de un circulo cuyo radio es medio proporcional entre el parámetro y la ordenada en el origen de la tangente.

(2) Acta eruditorum de 1691, 1692, 1699, Journal des Sçavants de 1692, Giornale di Litterati de 1692.

(3) Phylosophical Transactions, 1697. The properties of the Catenarian, id. 1699. Answers to animadversions concerning the catenarians.

(4) V. Enciclopedia Espasa, palabra Bernoulli.

habiendo comunicado Jaime á su hermano Juan que la "velaria" era tal que dividiendo el eje de abcisas en partes iguales los cubos de las diferenciales primeras de las ordenadas eran proporcionales á las diferenciales segundas de las abcisas, éste halló la naturaleza de la velaria y publicó los resultados á que había llegado (1) antes de que publicara los suyos el hermano mayor, Jaime (2). Sobre el problema de la velaria insistió luego Juan Bernoulli en su "Theorie de la manœuvre des vaisseaux" (3).

El mayor de los Bernoulli propuso además del problema de la catenaria la resolución de problemas análogos (4) como son por ejemplo determinar las figuras de equilibrio de hilos, cuya sección ó densidad siguiera una ley determinada, y determinar la forma de un hilo sometido á una fuerza central. Sus resoluciones se hallan en una nota al trabajo titulado "Aditamentum ad problema Funicularium", publicado en el tomo I de sus obras completas.

En las ya citadas lecciones de cálculo escritas por Juan Bernoulli se encuentran resueltos los siguientes casos (5).

1.° Se supone la densidad proporcional á la raíz cuadrada del arco contado á partir del punto más bajo de la curva.

2.° Se supone la densidad proporcional á la potencia enésima de la ordenada y al seno del ángulo que la tangente forma con el eje de las x. (Para $n.= 1$ la curva es una hipérbola).

3.° Se supone la densidad proporcional al coseno del ángulo que forma la tangente con el horizonte. (Parábola de segundo grado).

La resolución de estos problemas y otros análogos no ofrece dificultad. Partiendo por ejemplo de las ecuaciones intrínsecas:

$$\frac{dT}{ds} + \mathfrak{F} = o$$

$$\frac{T}{\rho} = \mathfrak{N} = o$$

---

(1) Juan Bernoulli. Journal des Sçavants, Abril de 1692. Véase también el tomo I de sus obras completas.

(2) Jaime Bernoulli. Acta eruditorum. Mayo 1692

(3) Basilea, 1714. Capítulos XIV, XV y XVI «De la courbure de la voile».

(4) Aditamentum ad problema Funicularium. En este trabajo se habla por primera vez de la elástica. Huyghens, en 1646, había ya obtenido la distribución de densidad que obliga al hilo á tomar la forma de una parábola.

(5) Lections 38, 39 et 40 «De curvatura filii inequalite crassi». Véase tomo III de sus obras completas.

y considerando que la fuerza extetrior $\delta\ g$ por unidad de longitud es paralela al eje de las y, se tendrá, llamando α al ángulo de la tangente con el eje x,

$$T \cos \alpha = T_o$$

$$\frac{T}{\rho} - \delta\ g \cos \alpha = o,$$

entre las cuales, eliminando T, queda la siguiente ecuación que caracteriza la curva de equilibrio

$$T_o = \delta\ g\ \rho \cos^2 \alpha$$

Si, por ejemplo, δ = constante, la última ecuación expresa una propiedad ya conocida de la catenaria; si $\delta = k \cos \alpha$, se tendrá

$$\frac{T_o}{kg} = \rho \cos^3 \alpha$$

que es una propiedad de la parábola de segundo grado, y así sucesivamente.

Juan Bernouilli resolvió también el problema recíproco, que se enuncia diciendo: dada una curva hallar la ley de la densidad en sus distintos puntos, de manera que la forma del hilo sea la de una curva dada (*). Puede resolverse este problema mediante la ecuación

$$T_o = g\ \rho \cos^2 \alpha$$

en la cual es ahora conocido ρ en función de α. Así por ejemplo (**), si $\rho = const. = a$,

$$\delta = \frac{T_o}{ga \cos^2 \alpha};$$

(*) Problemas de esta clase se encuentran en las colecciones de ejercicios de Mecánica racional de Jullien, Walton, S. Germain, Fuhrmann, Zech etc.

(**) S. Germain l. c.

si $\overline{\rho} = 4\, a \cos \alpha$ (cicloide),

$$\delta = \frac{T_o}{4\, ga \cos^3 \alpha};$$

si $\overline{\rho} = \frac{a}{\cos^3 \alpha}$ (parábola),

$$\delta = \frac{T_o}{ga \cos \alpha};$$

si $\overline{\rho} = \frac{a}{(\cos 2\, \alpha)^{3/2}}$ (hipérbola equilátera),

$$\delta = \frac{T_o}{ga} \frac{(\cos 2\, \alpha)^{3/2}}{\cos^2 \alpha}$$

y así sucesivamente. Hay que observar, por lo que toca á este problema inverso que la ley de la densidad puede venir dada en función de α, de $\overline{\rho}$, de x, de y, etc y que, si dada la ley se intenta la resolución del problema directo, se encontrará que la curva de equilibrio de que se ha partido constituye una "integral particular" de la ecuación diferencial del problema, siendo la integral general distinta según se haya expresado δ en función de una ú otra de las variables α, $\overline{\rho}$, x, y, *etc.* (1).

En la "Solutio problematis catenarii generaliter concepti" (2), según el método de Hermann (3), resuelve Juan Bernoulli el problema de investigar la forma de un hilo cuyos elementos están sujetos á fuerzas centrales. Estos problemas pueden resolverse del siguiente modo: Recordando que, por pasar la fuerza

---

(1) Appell. Traité de Mécanique Rationnelle tomo I. La condición de homogeneidad no es necesaria para que un hilo realice una catenaria. Así por ejemplo, si la densidad es precisamente proporcional al arco, la curva de equilibrio es una catenaria.—V. Haton de la Goupilliere.—Nouvelles Annales de Mathematiques, 1870.

(2) Bernoulli, tomo IV de sus obras completas.

(3) Hermann Phoronomia, Amsterdam, 1716.

F por un punto el momento de la tensión respecto al mismo es constante, se tendrá llamando r al radio vector y α al ángulo de la tangente con el mismo,

$$Tr\ sen\ \alpha = Const = C$$

Por otra parte, la segunda de las intrínsecas puede escribirse en este caso,

$$\frac{T}{\rho} = F\ sen\ \alpha$$

de donde eliminando T, queda:

$$F\rho\ r\ sen^2\ \alpha = C. \qquad 43$$

que es la ecuación diferencial de la curva.
Puede también adoptarse el procedimiento que á continuación se indica. Si θ es el ángulo polar,

$$T\ r\ sen\ \alpha = T\frac{r^2\ d\theta}{ds} = C.$$

Pero, además,

$$d\ T + F\ dr = o,$$

por lo tanto,

$$F = -\frac{dT}{dr} = -C\frac{d}{dr}\left[\frac{ds}{r^2\ d\theta}\right] \qquad 44$$

Esta ecuación ó la 43 pueden utilizarse para resolver el problema inverso. Cuando F es sólo función de la distancia, el problema es fácilmente reductible á cuadraturas (*). En efecto, en este caso

$$T = -\int F\ dr = \Phi\ (r)$$

(*) Juan Bernouilli, obras completaa, tomo IV.

luego,

$$\frac{1}{C}\Phi(r) = \frac{ds}{r^2\,d\theta} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}}{r^2\,d\theta}\,,$$

por lo tanto

$$d\theta = \pm \frac{C\,dr}{r\sqrt{r^2\,\Phi^2(r) - C^2}}$$

Así por ejemplo, si $F = \frac{K\,c^2}{r^2}$ siendo K una constante numérica y c el menor valor de r, para el que $\frac{dr}{d\theta} = o$, se tendrá llamando T_o al valor de la tensión en el punto correspondiente:

$$c\,T_o = C$$

$$T - T_o = \int_c^r k\,\frac{c^2}{r^2}\,dr = kc - \frac{kc^2}{r}$$

$$T = T_o + kc - \frac{kc^2}{r} = \Phi(r)$$

y por lo tanto,

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{c\,T_o}{r\sqrt{\left(T_o + kc - \frac{kc^2}{r}\right)^2 r^2 - c^2\,T_o^2}}$$

Poniendo $\frac{1}{r} = u$, y elevando al cuadrado los dos términos de la anterior igualdad é invirtiéndolos luego, resulta

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{T_o + kc - kc^2\,u}{c\,T_o}\right)^2 - u^2$$

de donde, derivando respecto á θ, queda la siguiente ecuación diferencial lineal entre u y θ,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\left(\frac{1}{c} + \frac{k}{T_o}\right)\frac{kc}{T_o} - \left(1 - \frac{k^2 c^2}{T_o^2}\right)u$$

ó bien, poniendo

$$-k\left(\frac{1}{T_o} + \frac{kc}{T_o^2}\right) = \left(1 - \frac{k^2 c^2}{T_o^2}\right)u_o \ ,$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\left(1 - \frac{k^2 c^2}{T_o^2}\right)(u - u_o) \ .$$

Para integrar esta ecuación hay que distinguir tres casos.
Si

$$kc < T_o \ ,$$

se tendrá:

$$u - u_o = A \cos\sqrt{1 - \frac{k^2 c^2}{T_o^2}}\,(\theta - \theta_o)$$

Si

$$kc > T_o$$

$$u - u_o = A\, e^{\sqrt{1 - \frac{k^2 c^2}{T_o^2}}\,\theta} + B\, e^{-\sqrt{1 - \frac{k^2 c^2}{T_o^2}}\,\theta} \ ;$$

y, si

$$kc = T_o \ ,$$

$$u = A + B\theta \ ;$$

En cuyas soluciones, A, B y θ_o son constantes arbitrarias que cabe determinar mediante las condiciones iniciales del problema.

De la propiedad de que el momento de la tensión respecto del centro de fuerzas es constante, se puede deducir la posición de las amitotas á la curva de equilibrio. En efecto, de

$$r\ T\ sen\ \alpha = C = c\ T_o$$

se deduce

$$r\ sen\ \alpha = \frac{c\ T_o}{T} = \frac{c\ T_o}{T_o + kc - \frac{kc^2}{T_o}}$$

Si r tiende á ∞, $r\ sen\ \alpha$ tiende á valer la distancia del centro de fuerzas á la asintota, luego esta distancia es igual á

$$\frac{c\ T_o}{T_o + kc}$$

en los tres casos.

El valor del ángulo que la asintofa forma con el eje polar, en cada caso se deduce de las ecuaciones de las curvas haciendo en ellas $r = \infty$ ó $u = o$.

Jaime Bernoulli parece haber sido el primero en resolver el problema siguiente: Hallar la forma de la sección recta de un cilindro indefinido en el sentido de sus generatrices y realizado en parte, por una tira de tela que constituye el fondo de un vaso el cual contiene un líquido determinado.

Para resolver este problema del que se ocupó también Juan (*), se puede partir de las ecuaciones intrínsecas de equilibrio de un elemento de tela de anchura ds y longitud igual á la unidad, tomada ésta en el sentido de las generatrices del cilindro.

Recordando que la presión ejercida por una columna vertical de líquido en reposo sobre un elemento del fondo del vaso, es igual al peso de la columna que

---

(*) De curvatura lintei á fluido incumbente. Lectiones Mathematicae (40) V sus obras completas, tomo III, págs. 512.

gravita directamente sobre el elemento y se ejerce normalmente al citado elemento, se tendrá, llamando y á la distancia del elemento $1 \times ds$ del fondo á la superficie de nivel y T á la tensión por unidad de longitud medida en el sentido de las generatrices,

$$\frac{dT}{ds} = o$$

$$\frac{T}{\overline{\rho}} = ky$$

siendo $\overline{\rho}$ el radio de curvatura de la sección recta del cilindro que constituye el fondo, curva que llama *lintearia* Jaime Bernoulli, y siendo k una constante igual al peso específico del líquido.

De la primera de las dos ecuaciones anteriores se deduce

$$T = Const$$

y la segunda, poniendo $\frac{T}{k} = \frac{1}{c^2}$,

$$\overline{\rho}\, y = c^2 \qquad 45$$

La propiedad que expresa esta ecuación es común á otra curva, la elástica plana, que es la que realiza una varilla elástica inalargable sujeta á dos fuerzas y dos pares aplicados á sus extremos, y cuya forma, antes de la deformación producida por aquéllos es la de una recta ó un arco de circunferencia.

Como luego se demostrará, la resistencia á la flexión que se experimenta al querer doblar una varilla elástica puede representarse por una fuerza y un par que obrando en una sección cualquiera de la elástica equilibran las fuerzas que obran en las dos partes en que la citada sección divide á la elástica. Esta fuerza y par se llaman elásticos, y este último, cuyo eje es perpendicular al plano de la curva es proporcional, como también se demostrará más tarde, á la curvatura $\frac{1}{\overline{\rho}}$ en el punto considerado, cuando la forma primitiva ó forma de la curva antes de la deformación una recta, y á la diferencia $\frac{1}{\overline{\rho_o}} - \frac{1}{\overline{\rho_o}}$ de curvaturas antes y después de la deformación cuando la forma inicial no es la de una recta.

Designando, pues, por N el par elástico y por B un coeficiente,

$$N = B\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}\right)$$

Sea T_1 una de las fuerzas exteriores que obra en un extremo. Para que la curva considerada como sistema rígido esté en equilibrio, es necesario que la fuerza exterior que obra en el otro extremo sea igual y opuesta á T_1. Y, del mismo modo, para el equilibrio de un fragmento cualquiera de curva comprendido entre un extremo y una sección cualquiera, es necesario que la fuerza elástica en esta sección sea igual á $-T_1$

Refiriendo la curva á dos ejes coordenados, de los cuales el de las x sea paralelo á la dirección de T_1, y tomando momentos respecto á un punto del eje, que supondremos ser el origen de coordenadas, se tendrá expresado que es nula la suma de momentos de las fuerzas que obran sobre un fragmento comprendido entre el extremo, de coordenadas $x_1\, y_1$ y el punto x, y,

$$T_1 y_1 - T_1 y - N_1 + N = o$$

habiendo designado por N_1 el momento de la fuerza exterior en el extremo. Substituyendo en la expresión anterior el valor de N, y trasladando el eje de las x, paralelamente á sí mismo, de un modo conveniente, se ve que tanto en el caso de ser igual á cero la curvatura $\frac{1}{\rho_o}$ inicial como en el caso en que no es nula, la ecuación de equilibrio tiene la forma de la ecuación 45 (*).

(*) La linea elástica, en un caso particular ($N_1 = o$) fué considerada ya por Galileo, á la que atribuyó la forma de una parábola. (V. Discorsi). En las Acta eruditorum de 1691, en el escrito ya citado que lleva el epígrafe Aditamentum ad Problema funicularium, explica Jaime Bernoulli, que fué conducido al problema de la elástica por el de la catenaria y por haberle llamado Leibnitz la atención sobre el particular. Y á continuación indica la siguiente propiedad: que la porción del eje comprendida entre la ordenada y la tangente, es á la tangente como el cuadrado de la ordenada es á una constante, reservándose la demostración que publicó tres años más tarde en las mismas Acta, página 262, en un trabajo que lleva por título, Curvatura laminæ elasticæ; *ejus identitas cum curvatura lintei à pondere inclusi fluidi expansi est*. Al año siguiente volvió á ocuparse de ella, y en 1795 publicó en las memorias de la Academia de Ciencias de París, el trabajo titulado: Veritable hypothése de la résistancie des solides, avec la demonstration de la courbure des corps qui font ressorts. Véase además sus obras completas tomo I, págs. 449, 536-600, 601-607, 639-646. Juan Bernoulli ocupóse

De la ecuación $\frac{1}{\rho} y = c^2$ se deduce introduciendo el ángulo θ que la tangente á la curva forma con el eje de las x,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c^2} y$$

Derivando esta expresión respecto á s, y observando que tal como se ha planteado el problema

$$\frac{dy}{ds} = - \operatorname{sen} \theta,$$

se tiene

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = - \frac{1}{c^2} \operatorname{sen} \theta$$

que es la ecuación diferencial del movimiento del péndulo simple, si θ representa en éste el ángulo del hilo de suspensión con la vertical, y s el tiempo. A los tres

---

también de la elástica en sus Lecciones ya citadas (Lectio 45) V. obras completas, tomo III, pág. 515 y 4.° pág. 242. Su hijo Daniel descubrió la propiedad de que la elástica hacia mínima la integral

$$\int \frac{ds}{\rho^2}$$

lo cual indujo á Euler á plantear el problema inverso, de hallar las curvas que hacen mínima á la integral anterior, de lo cual se ocupó en el tratado que lleva por título Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes, editado en 1774 en Lausana. En el apéndice primero, «de curvis elasticis» discute las formas de la elástica. En los Novi Comentari Academiae Petropolitanæ, tomos III, XV y XX, ocupóse aún de la elástica. Euler demostró además que la elástica goza de las propiedades siguientes: 1.ª Entre todas las curvas de longitud dada ó que unen dos puntos delsemiplano $y > o$, es la que determina el mayor volumen del cuerpo engendrado al girar el área limitada por la curva, el eje de giro, supuesto ser el eje x, y las dos ordenadas extremas; y 2.ª Entre todas las curvas en que esta área tiene un valor determinado, es también la que determina el volumen máximo engendrado por la rotación de la misma alrededor del eje x. (V. Bolza Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig 1909, pág. 535 y 536. (De la elástica se ocupan casi todos los tratados de elasticidad y de cálculo de variaciones. Acerca de los últimos véase la bibliografía que acompaña la nota II, y en cuanto á los primeros citaremos en especial los de Clebsch y Love. Véanse también los tratados de funciones elípticas de Appell y Lacour, Paris 1897 y Halphen, Paris, 1883. En ambos se halla además estudiada geométricamente la curva elástica, plana de «Levy», en la que cada elemento soporta una presión normal uniforme).

casos que se distinguen en el estudio del péndulo simple corresponden tres clases de elásticas. Aquellos tres casos son:

1.° Cuando el péndulo ejecuta oscilaciones.

2.° Cuando ejecuta rotaciones completas.

3.° Cuando el movimiento no es periódico, y el péndulo tiende á colocarse verticalmente, siendo necesario un tiempo infinito para alcanzar esta posición.

En las elásticas, en que el ángulo de la normal con el eje sigue las variaciones del que forma con la vertical el hilo del péndulo, y en que la curvatura corresponde con la velocidad angular de aquél, corresponden al primer caso elásticas con un punto de inflexión $\frac{1}{\rho} = o$, en cuyo caso $y = o$, es decir, que los puntos de inflexión son aquellos en que corta al eje de las x; al segundo caso elásticas en las que $\frac{1}{\rho}$ no se anula, y que por lo tanto no cortan al eje de las x ni presentan puntos de inflexión, siendo unas y otras curvas constituídas por ramas congruentes. Al tercer caso del movimiento del péndulo corresponde una elástica á que es asintota el eje de las x, y constituída por una sola rama. En los tres casos, las ramas presentan simetría alrededor de una paralela al eje y.

Multiplicando la última ecuación por $d\theta$ é integrando los dos miembros, queda

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{2}{c^2}(\cos\theta + \mu)$$

designando por μ la constante arbitraria.

El valor de y, vendrá dado en función de θ, por

$$y = \frac{c^2}{\rho} = c^2 \frac{d\theta}{ds} = c\sqrt{2(\cos\theta + \mu)}$$

Si la elástica corta al eje x bajo un ángulo α, se podrá poner

$$\mu = -\cos\alpha$$

y, en este caso, empezando á contar los arcos desde el punto de intersección de la curva con el eje y,

$$ds = \frac{c\,d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - \cos\alpha}} = \frac{c\,d\theta}{\sqrt{4\left[sen^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\theta}{2}\right]}}$$

y, poniendo

$$sen\,\frac{\theta}{2} = sen\,\frac{\alpha}{2}\,u$$

se tendrá invirtiendo la integral después de la substitución,

$$sen\,\frac{\theta}{2} = sen\,\frac{\alpha}{2}\,sn\,\frac{s}{c}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2k}{c}\,cn\,\frac{s}{c}$$

$$v = 2\,kc\,sn\frac{s}{c}$$

$$cos\,\frac{\theta}{2} = dn\,\frac{s}{c}$$

$$\overline{\rho} = \int_o^s ds\,cos\,\theta = \int_o^s ds\left(1 - 2\,k^2\,su^2\,\frac{s}{c}\right) = s\left[1 - 2\,\frac{\theta''\,(o)}{\theta\ \ (o)}\right] + 2c\,\frac{\theta'\left(\frac{s}{c}\right)}{\theta\left(\frac{s}{c}\right)}.$$

Llamando rama á la parte de la curva comprendida entre dos puntos en que

corta al eje de las x no cortando al eje en ningún otro punto, cada una de las ramas tiene, en virtud de la fórmula que relaciona y con s, una longitud:

$$L = 2\,K\,c$$

siendo K la integral elíptica completa de 1.ª especie y de módulo $sen\ \frac{\alpha}{2}$. La longitud total del hilo $\mathcal{L}$ se compondrá de n ramas, así es que

$$\mathcal{L} = n\,L$$

En el caso en que los pares que obran en los extremos de la elástica sean nulos, y que por lo tanto la recta que une los extremos es el eje de las x siendo aquellos extremos puntos de inflexión, n es un número entero, siendo igual á $n + 1$ el número de puntos de inflexión. Dada en este caso la longitud $\mathcal{L}$, el valor del módulo $sen\ \frac{\alpha}{2}$ resulta de

$$\mathcal{L} = 2\,n\,c\,K$$

y por tanto

$$K = \frac{\mathcal{L}}{2\,n\,c}$$

Para que resulte una figura de equilibrio con n ondas, es necesario que esta ecuación dé para $sen\ \frac{\alpha}{2}$ un valor comprendido entre o y 1. Ahora bien, dando á α valores comprendidos entre cero y π, la integral K pasa del valor $\frac{\pi}{2}$ al valor ∞, y variando siempre en el mismo sentido. Luego el valor mínimo de K es $\frac{\pi}{2}$ y por lo tanto, es preciso que

$$\frac{\mathcal{L}}{2\,n\,c} \geq \frac{\pi}{2}$$

Si se supone que la figura de equilibrio antes de la deformación es una recta en cuyo caso $c = \sqrt{\frac{B}{T}}$ la desigualdad siguiente es la condición para que exista una figura de equilibrio con n ondas:

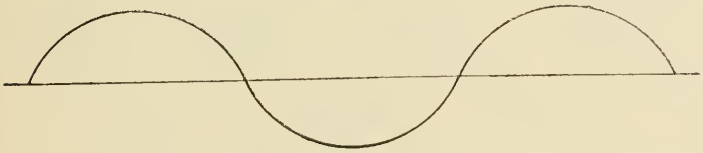
$$T > \frac{\pi^2 B}{\mathcal{L}^2} n^2$$

Si T no cumple con la condición correspondiente al caso $n = 1$,

$$T > \frac{\pi^2 B}{\mathcal{L}^2} ,$$

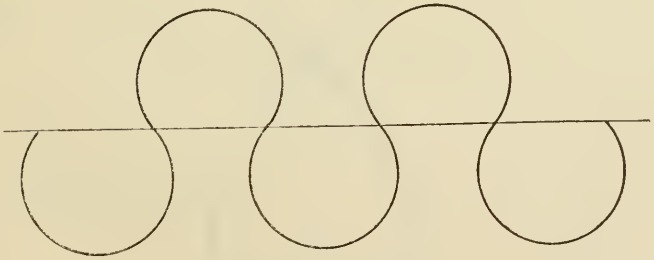
la sola figura de equilibrio es una recta, correspondiente á los casos $\alpha = o$ y $\alpha = \pi$ (*)

Para valores de α comprendidos entre o y $\frac{\pi}{2}$ la elástica afecta formas pa-



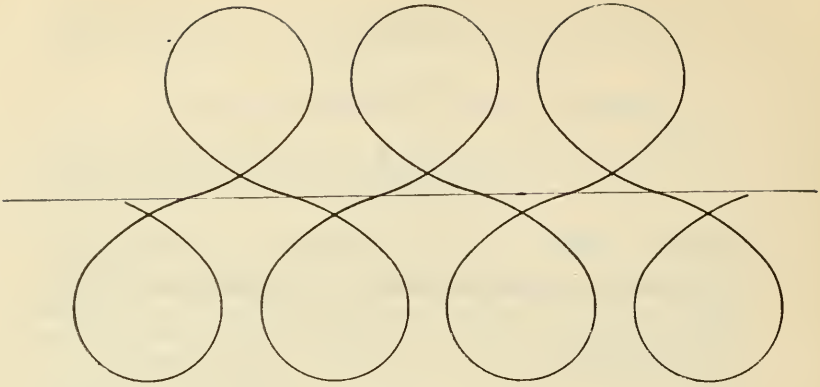
(Fig. 6)

recidas a la sinusoide (fig. 6), si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la tangente en los puntos de inflexión

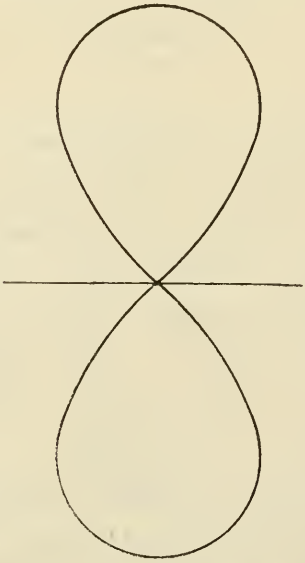


(Fig. 7)

(*) V. la nota II que contiene algunas indicaciones sobre la estabilidad de la elástica.



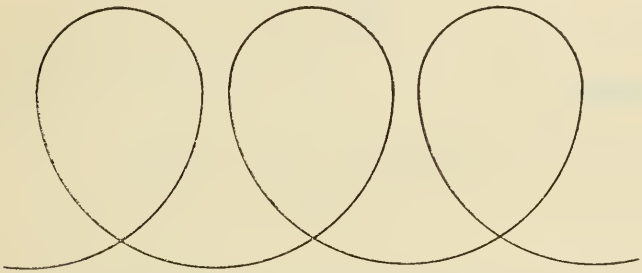
(Fig. 8)



(Fig. 9)

es vertical; si $\alpha > \frac{\pi}{2}$ la curva tiene la forma de las (figs. 7 y 8), en especial si $c = o$, la de la (fig. 9) siendo en este caso $\alpha = 139^{\circ}\ 9'$

Cuando la elástica no corta al eje de la x, no hay puntos de inflexión, y en este caso $\mu > 1$, pudiendo θ variar de θ á π. La curva tiene la forma de la (fig. 10), siendo las fórmulas correspondientes á este caso análogas á las del an-



(Fig. 10)

terior con la diferencia de que el valor del módulo de las integrales elípticas es igual á

$$\sqrt{\frac{2}{1+\mu}}$$

Por último, si $\mu = 1$,

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{4}{c^2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

y por lo tanto

$$\frac{ds}{c} = \frac{d\,\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

Integrando é invirtiendo luego, resulta

$$tg\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{s}{c}}$$

y, además

$$y = 2c\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4c}{e^{s/c} + e^{-s/c}} = \frac{c}{\cos h\, s/c}$$

$$x = 2c\,\frac{e^{s/c} - e^{s/c}}{e^{s/c} - e^{s/c}} - s = 2c\,tg\ h.\,\frac{s}{c} - s$$

La curva está constituída por un solo lazo y es asintota al eje de las x.

Llámase catenaria de igual resistencia la que realiza un hilo pesado cuya sección variable sea proporcional á la tensión que sufre, así es que la tensión por unidad de superficie es igual en todos sus puntos. Parece que la forma de esta curva fué hallada por primera vez por David Gilbert al construir un puente colgante (*). Coriolis publicó una solución del problema en el tomo I del Journal de Liouville. He ahí como se puede hallar su ecuación y algunas de sus propiedades.

Si la sección es σ y K un coeficiente de proporcionalidad, ρ la densidad por unidad de volumen y p el peso por unidad de longitud, y se cuentan los arcos

(*) Routh: Analytical Statics. Tomo I, pág. 306. Véase además las Phylosophical Transactions de 1826. Bobilier y Fink, se ocuparon también de esta curva en los Annales de Gergonne, 1626-25. Loria en su tratado de curvas planas ya citado, indica que Gudermann se había ocupado de la catenaria de igual resistencia 6 años antes que Coriolis.

á partir del punto en que la tangente es horizontal, se tendrá en virtud de la segunda de las ecuaciones intrínsecas

$$\frac{T}{\rho} = p \cos \alpha = g \rho \sigma \cos \alpha = g \rho k T \cos \alpha$$

ó sea

$$\frac{1}{\rho} \cos \alpha = Const = m$$

que expresa *que en la catenaria de igual resistencia, la proyección del radio de curvatura* $\frac{1}{\rho}$ *sobre la vertical es constante.*

La ecuación cartesiana se halla fácilmente en virtud de esta propiedad, y resulta ser

$$y = m \log \sec \frac{x}{m}$$

La curva tiene dos asíntotas verticales para $x = \pm \frac{\pi m}{2}$.

Entre las distintas propiedades de esta curva (*) citaremos las siguientes:

La diferencia de ordenadas entre el punto de intersección de dos normales y el centro de gravedad del arco cuyos extremos están en aquéllas es constante é igual á m.

La abcisa del centro de gravedad de un arco es la del punto de intersección de sus tangentes extremas.

Al rodar una catenaria de igual resistencia sobre el eje x el lugar geométrico de los centros de curvatura en los centros instantáneos es una catenaria ordinaria (**).

Esta última propiedad se deduce de la relación entre el radio de curvatura y el arco, que se puede escribir:

$$\frac{1}{\rho} = m \cos \frac{s}{m}$$

(*) Thomson (Lord Kelvin) y Tait, Treatise on natural Phylosophy Londres 1895; Routh, Statics, Cambridge 1896.

(**) Minchin Teatise on Statics. Londres 1896.

Schell (*) estudió el caso de catenarias de igual resistencia en el caso de existir una carga por unidad de longitud cuya proyección horizontal es constante, y Binet el de la catenaria de igual resistencia sujeta á fuerzas centrales en razón inversa del cuadrado de la distancia.

En cuanto á esta última, de la ecuación intrínseca

$$F \operatorname{sen} \theta = \frac{T}{\rho}$$

se deduce

$$\frac{\rho g \sigma}{r^2} \operatorname{sen} \theta = \frac{K \rho g I \operatorname{sen} \theta}{r^2} = \frac{T}{\rho}$$

por lo tanto,

$$\rho \operatorname{sen} \theta = m r^2$$

siendo m una constante. De esta propiedad se deduce fácilmente la ecuación cartesiana de la curva.

Antes de terminar con las catenarias planas citaremos los estudios de Fuss (***), que con ocasión de la erección de un puente sobre el Neva estudió la distribución de tensiones y figura de equilibrio del cable de sostén, teniendo en cuenta el peso de éste y de los tirantes, y también los estudios de Wilson sobre la superficie engendrada al girar una catenaria pesada alrededor de su eje con velocidad angular constante (*).

(*) Schell, Theorie des Bewegung und der Kräfte, Leipzig, 1880, tomo II.
(**) Journal de Lionville, tomo IX. Véase Vargas Aguirre l. c.
(***) Nova Actæ Petropolitanæ, 1794.
(*) Annals of Mathematics 2.ª serie, V. 9, n.º 3.

XIX — Analogías entre el equilibrio de un hilo y el movimiento de un punto.

Galileo (**) se ocupó ya en estas analogías, que fueron desarrolladas más tarde por Mac-Laurin (1), Möbins (2), Padeletti (3), Schell (4), Bonnet (5), Serret (6), Towsend (7), Staude (8), Kaiz (9), Legoux (10), Andoyer (11), Marcalongo (12), Appell (13), Penachietti (14), Laisant (15) y Gulberg (16). Resultan estas analogías de la comparación de las ecuaciones del movimiento de un punto y las de equilibrio de un hilo, puestas ya en la forma ordinaria, ya en la intrínseca.

De un modo general, toda curva puede considerarse como la trayectoria de un punto y á la vez como figura de equilibrio de un hilo, cuyo elemento de masa sea dm. En el movimiento de un punto, la velocidad $v + dv$ en el instante $t + dt$ es la resultante de la velocidad v en el instante t y del incremento φdt de velocidad en el tiempo dt, siendo φ la aceleración. Del mismo modo, la tensión $T + dT$ es la resultante de la tensión $-T$ y la fuerza exterior Fds. Si una curva es á la vez trayectoria de un punto y figura de equilibrio de un hilo, se tendrá igualando las dos expresiones del elemento del arco,

$$ds = vdt = \frac{dm}{\rho}.$$

(**) Opere t. 13, pág. 263. Véase también los Dialoghi e dimostrazione intorno due nove scienze.

(1) A complete system of fluxions Edimburg, 1742.

(2) Lehrbuch des Statik Leipzig, 1837.

(3) Giornale di Matematica, 1876. Sulle teorie della curva funicolori.

(4) l. c.

(5) l. c.

(6) Theorie geometrique et mécanique de courbes de double courbure, Paris, 1860.

(7) Quaterly Journal of Mathematics, 1874.

(8) Leipziger Berichte, 1886.

(9) Program Minnestadt, 1855.

(10) Memoires de Toulouse, 1885

(11) Comptes Rendus, 1885.

(12) Rendiconti di Napoli, 1888.

(13) Comptes Rendus, tomo XCVI (1883), Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1887, Bulletin de la Societé matématique de 1891 y Traité de Mécanique Rationelle.

(14) Giornale di Battaglini, 1876.

(15) Nouvelles Annalles de Mathématiques, 1902.

(16) Videnskabelskrifter Math. natur Klasse. Kristiania, 1902.

Por otra parte, igualando la expresión del ángulo de contingencia en función de los elementos mecánicos en uno y otro caso,

$$\frac{}{d\varepsilon^2} = \frac{\frac{v^2}{\rho^2}\,dt^2 - dv^2}{v^2} - \frac{(-F)^2\,dm^2 - dT^2}{T^2}$$

cuya ecuación puede satisfacerse de distintos modos, por ejemplo, poniendo

$$\frac{\frac{v}{\rho}\,dt}{-F dm} = \lambda$$

$$\frac{v}{T} = \lambda$$

Si la densidad ρ se supone igual á la unidad, $dm = ds$, y de las últimas igualdades escritas se deduce que si un hilo está en equilibrio por la acción de una fuerza F, puede considerarse como la trayectoria de un punto cuya aceleración, dirigida en sentido contrario de F es cada instante proporcional á Fv. La tensión del hilo es además proporcional á la velocidad del punto. Y viceversa.

La igualdad de los ángulos que forman los planos osculadores resulta de las fórmulas anteriores ó bien de la circunstancia de que la fuerza exterior en el caso de la curva de equilibrio y la aceleración en la trayectoria, están situadas en el plano osculador.

Las integrales primeras del movimiento del punto tienen su traducción á la figura de equilibrio de un hilo, y en general, toda propiedad de la trayectoria puede traducirse en una propiedad análoga de la curva realizada por el hilo.

DEL MOVIMIENTO

DE LOS

HILOS INELÁSTICOS

I.—Forma ordinaria de las ecuaciones del movimiento.

El principio de D'Alembert permite pasar de las ecuaciones del equilibrio de un elemento ds de hilo á las del movimiento, con sólo introducir la fuerza llamada de inercia, cuyas componentes son $\rho\sigma\, ds\, \frac{\partial^2 x}{dt^2}$, $\rho\sigma\, ds\, \frac{\partial^2 y}{dt^2}$, y $\rho\sigma\, ds\, \frac{\partial^2 z}{dt^2}$

De modo que se tendrá:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left[T\frac{\partial x}{\partial s}\right] + \rho\sigma\left[X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right] &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial s}\left[T\frac{\partial y}{\partial s}\right] + \rho\sigma\left[Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right] &= 0 \qquad (1) \\
\frac{\partial}{\partial s}\left[T\frac{\partial z}{\partial s}\right] + \rho\sigma\left[Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] &= 0
\end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones junto con la condición de inextensibilidad del hilo:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1 \qquad (2)$$

contituyen un sistema de cuatro ecuaciones para expresar x, y, z y T en función de las dos variables independientes s y t. La variación de s suponiendo t constante, indica el paso de un elemento á otro del hilo en una configuración determinada de éste, dada por el valor de t. La variación de t suponiendo á s constante, indica el paso de una posición del elemento ds á otra posición del mismo elemento en el espacio.

Llamando u, v, w á las componntes de la velocidad del elemento ds, φ, γ, χ

á los ángulos que con los ejes forma la tangente á la curva que en un instante dado el hilo realiza, las cuatro ecuaciones anteriores pueden adquirir la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[T\cos\varphi\right] + \rho\sigma X \\ \rho\sigma \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[T\cos\gamma\right] + \rho\sigma Y \\ \rho\sigma \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[T\cos\chi\right] + \rho\sigma Z \end{aligned} \qquad (3)$$

ya que evidentemente, $\cos\varphi = \frac{\partial x}{\partial s}$, $\cos\gamma = \frac{\partial y}{\partial s}$ y $\cos\chi = \frac{\partial z}{\partial s}$. Derivando estas tres últimas igualdades, se tendrá

$$-\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s} \quad , \quad -\operatorname{sen}\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s} \quad , \quad -\operatorname{sen}\chi \frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial s} \qquad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) junto con la condición geométrica

$$\cos^2\varphi + \cos^2\gamma + \cos^2\chi = 1 \qquad (5)$$

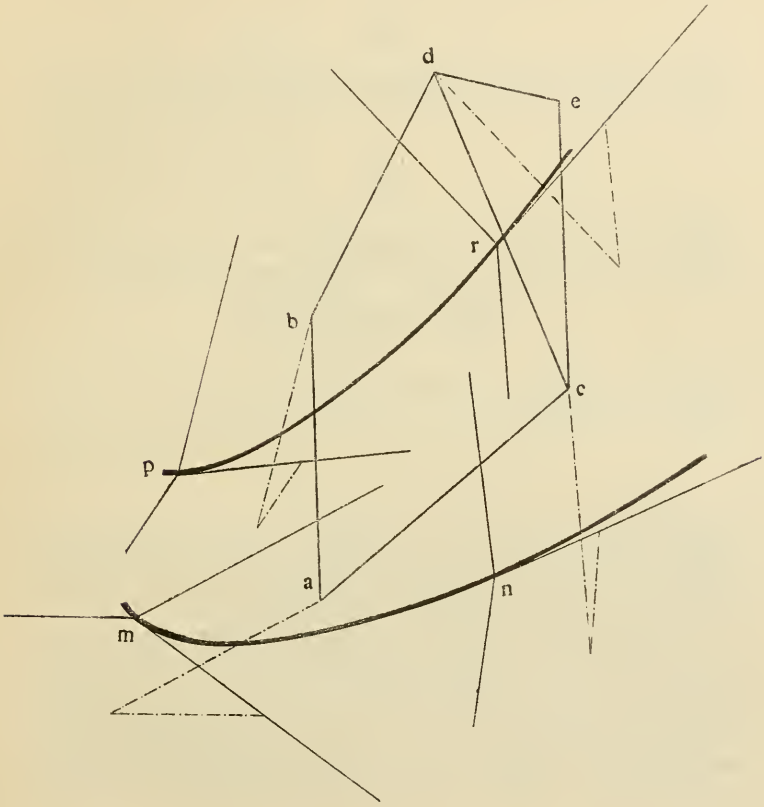
constituyen un sistema de siete ecuaciones para expresar u, v, w, φ, γ, χ y T en función de las variables independientes s y t.

Tanto en las ecuaciones (1) y (2), como en las (3), (4) y (5), las integrales deben satisfacer las condiciones iniciales y en los límites.

II.—Forma intrinseca de las ecuaciones del movimiento.

Antes de proceder al planteo de las ecuaciones diferenciales en la forma intrínseca, haremos algunas consideraciones geométricas. Sea una curva m, n que se tralada á la posición p, r, siendo arco m, n = arco p, r. Imamaginemos tres ejes invariablemente unidos á m y de direcciones íntimamente ligadas á la curva, verbigracia la tangente, normal principal y binormal. Suponiendo fija la curva m n, definiremos un primer movimiento de los ejes de modo que el origen recorra la curva m n y tengan los ejes constantemente las direcciones de la tan-

gente, normal principal y binormal en cada punto. A este primer movimiento se le designará por (S) como indicando que el origen se corre á lo largo de la curva



(Fig. 11)

fija. En el segundo movimiento (T) de los ejes, el origen se correrá de m á p siendo p la nueva posición de m al pasar la curva de mn á pr. Los nuevos ejes en p son la tangente, normal principal y binormal en p á la curva pr.

Ahora bien, la velocidad de un punto a que forma parte invariable de los ejes, es, en el movimiento (S), suponiendo que la velocidad con que m se mueve es la unidad, y llamandods á mn,

$$\frac{ac}{ds};$$

más si en vez de considerar el movimiento (S) como arrancando de m, los suponemos arrancar de p pasando los ejes á r, la velocidad en este movimiento es

$$\frac{bd}{ds}$$

siendo b, c y d los puntos cuyas coordenadas referidas á los ejes respectivos son iguales á las de a referidas á los suyos. Por lo lo tanto, vectorialmente,

$$\frac{bd - ac}{ds} = \frac{bd - bc}{ds} = \frac{dc}{ds}$$

representa la diferencia de velocidades en el movimiento (S) debida al movimiento T. Pero empezando por el movimiento (T) se ve que

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc - cc}{dt} = \frac{dc - ba}{dt}$$

es la diferencia de velocidades en el movimiento (T) debida al movimiento (S). Luego el incremento vectorial de velocidad en el movimiento (S) debido al movimiento (T), dividido por dt, es igual al incremento vectorial de velocidad en el movimiento (T) debido al movimiento (S) y dividido por ds.

Vamos á formular analíticamente este teorema. Sean ξ, η y ζ, las proyecciones sobre los ejes de la velocidad del punto m en el movimiento (T); ξ_1, η_1 y ζ_1 las proyecciones sobre los mismos ejes de la velocidad de m en el movimiento (S); p, q, y r las componentes de la rotación instantánea del triedro de referencia en el movimiento (T); p_1, q_1 y r_1 los valores correspondientes en el movimiento (S). Los valores de los componentes según los ejes de la velocidad $\frac{ba}{dt}$ del punto a, serán

$$\frac{ba}{dt}\begin{cases} \xi + qz - ry = v_x \\ \eta + rx - pz = v_y \\ \zeta + py - qx = v_z \end{cases}$$

Las componentes de la velocidad $\frac{ca}{ds}$, tendrán los siguientes valores

$$\frac{ca}{ds}\begin{cases} \xi_1 + q_1 z - r_1 y = \bar{v}_x \\ \eta_1 + r_1 x - p_1 y = \bar{v}_y \\ \zeta_1 + p_1 y - q_1 x = \bar{v}_z \end{cases}$$

Las componentes de $\frac{de}{ds\,dt}$,

$$\frac{de}{ds\,dt}\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial s} + q_1 v_z - r_1 v_y \\ \frac{\partial v_y}{\partial s} + r_1 v_x - p_1 v_z \\ \frac{\partial v_z}{\partial s} + p_1 v_y - q_1 v_x \end{cases}$$

y del mismo modo

$$\frac{de}{ds\,dt}\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + q\bar{v}_z - r\bar{v}_y \\ \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + r\bar{v}_x - p\bar{v}_z \\ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + p\bar{v}_y - q\bar{v}_x \end{cases}$$

Y por lo tanto, igualando las componentes de $\frac{de}{ds\,dt}$, desarrollando y sacando x, y y z factores comunes, resulta:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} + q_1\zeta - r_1\eta_1 + x\left[-qq_1 - rr_1\right] + y\left[-\frac{\partial r}{\partial s} + q_1 p\right] + z\left[\frac{\partial q}{\partial s} + r_1 p\right] =$$
$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + q\zeta_1 - r\eta_1 + x\left[-q_1 q - rr_1\right] + y\left[-\frac{\partial r_1}{\partial t} + qp_1\right] + z\left[\frac{\partial q_1}{\partial s} + rp_1\right]$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} + r_1 \xi - p_1 \zeta + x\left[\frac{\partial r}{\partial s} + p_1 q\right] + y\left[-r r_1 - p_1 q\right] + z\left[-\frac{\partial p}{\partial s} + r_1 q\right] =$$
$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + r \xi_1 - p \zeta_1 + x\left[\frac{\partial r_1}{\partial t} + p q_1\right] + y\left[-r_1 r - p q_1\right] + z\left[-\frac{\partial p_1}{\partial t} + r q_1\right]$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} + p_1 \eta - q_1 \xi + x\left[-\frac{\partial q}{\partial s} + p_1 r\right] + y\left[\frac{\partial p}{\partial s} + q_1 r\right] + z\left[-p_1 p - q_1 q\right] =$$
$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + p \eta_1 - q \xi_1 + x\left[-\frac{\partial q_1}{\partial t} + p r_1\right] + y\left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + q r_1\right] + z\left[-p p_1 - q q_1\right]$$

Mas como estas tres igualdades han de tener lugar para todos los valores que se puedan atribuir á x, y y z, es necesario que se cumplan las siguientes seis relaciones fundamentales

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} + q_1 \zeta - r_1 \eta = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + q \zeta_1 - r \eta_1$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial s} + r_1 \xi - p_1 \zeta = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + r \xi_1 - p \zeta_1$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} + p_1 \eta - q_1 \xi = \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + p \eta_1 - q \xi_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} + q_1 r = \frac{\partial p_1}{\partial t} + q r_1$$
$$\frac{\partial q}{\partial s} + r_1 p = \frac{\partial q_1}{\partial t} + r p_1$$
$$\frac{\partial r}{\partial s} + p_1 q = \frac{\partial r_1}{\partial t} + p q_1$$

Recordando que los ejes de referencia son la tangente, normal principal y binormal,

$$q_1 = \eta_1 = \zeta_1 = o\,, \qquad \xi_1 = 1$$
$$r_1 = \frac{1}{\rho}$$
$$p_1 = \frac{1}{\tau}$$

siendo $\frac{1}{\tau}$ la segunda curvatura. Luego las seis condiciones anteriores adoptan la forma simplificada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial p_1}{\partial t} &= q r_1 \\
\frac{\partial q}{\partial s} &= r p_1 - p r_1 \\
\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial r_1}{\partial t} &= - q p_1 \\
\frac{\partial \xi}{\partial s} &= \eta r_1 \\
\frac{\partial \eta}{\partial s} &= r - \xi r_1 + \zeta p_1 \\
\frac{\partial \xi}{\partial s} &= - \eta p_1 - q
\end{aligned} \tag{6}$$

Ahora bien, las componentes de la aceleración del elemento *ds*, referidas á los mismos ejes, son:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi}{\partial t} + q\zeta - r\eta \\
&\frac{\partial \eta}{\partial t} + r\xi - p\zeta \\
&\frac{\partial \zeta}{\partial t} + p\eta - q\xi \quad ,
\end{aligned}$$

que, por el principio de D'Alembert, han de ser iguales á la suma de las componentes de las fuerzas exteriores y de la tensión, divididas por $\rho\,\sigma$. Así pues, se tendrán las ecuaciones dinámicas en la forma:

$$\begin{aligned}
\rho\sigma\left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + q\zeta - r\eta\right] &= \frac{\partial T}{\partial s} + \rho\sigma\,\mathfrak{F} \\
\rho\sigma\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + r\xi - p\zeta\right] &= T r_1 + \rho\sigma\,\mathfrak{N} \\
\rho\sigma\left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + p\eta - q\xi\right] &= \rho\sigma\,\mathfrak{N}'
\end{aligned} \tag{7}$$

A las ecuaciones (6) y (7) las llamaremos ecuaciones de Floquet (*). Son en número de nueve y permiten expresar $p, g, r, p_1 r_1, \xi, \eta, \zeta$ y T en función de las variables independientes s y t suponiendo que las fuerzas exteriores y la densidad son funciones exclusivamente de s y t. Si fueran funciones de $x, y, z, s,$ y t, siendo x, y, z las coordenadas del centro de gravedad del elemento de referidas á ejes fijos, verbigracia, los iniciales para el origen de arcos, á las ecuaciones anteriores debieran añadirse otras, que vamos á deducir. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2$ y γ_2 los cosenos directores de los ejes móviles respecto á los fijos, con la correspondencia que el siguiente cuadro indica:

		Móviles		
		Tangente	Normal	Binormal
Fijos	x	α	α_1	α_2
	y	β	β_1	β_2
	z	γ	γ_1	γ_2

Los valores de p, q y r son (**)

$$p = \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}$$

$$q = \alpha \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \beta \frac{\partial \beta_2}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}$$

$$r = \alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \beta}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

Entre los nueve cosenos $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2$ y γ_2 hay seis relaciones geométricas independientes de la forma

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$
$$\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0$$

(*) Floquet. Comptes Rendus. 1892.

(**) Appell. Traité de Mécanique Rationnelle. Tomo I. Paris 1902.

Por último, las proyecciones de ξ, η y ζ sobre los ejes ejes fijos son $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \xi\alpha + \eta\alpha_1 + \zeta\alpha_2$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \xi\beta + \eta\beta_1 + \zeta\beta_2$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \xi\gamma + \eta\gamma_1 + \zeta\gamma_2$$

El sistema total tiene 21 ecuaciones para expresar las 21 cantidades ξ, η, ζ, T, p, q, r, p_1, r_1, x, y, z, y los nueve cosenos en función de s y t.

Para que las soluciones convengan será preciso siempre que $T \geq o$

Si las fuerzas exteriores y la densidad fueran sólo funciones de s y t, bastan las nueve primeras ecuaciones de Floquet para hallar la forma de la curva, ya que de ellas se deducen los valores de la curvatura y torsión. De querer expresar x, y, y z en función de s y t es necesario recurrir al segundo sistema de doce ecuaciones que en este caso constituyen un sistema independiente del de Floquet.

Si en las ecuaciones de Floquet se supone $\mathfrak{Y}' = o$, $p = o$, $q = o$, $\zeta = o$, representarán el movimiento en un plano fijo. Introduciendo el ángulo α que la tangente á la curva que en un instante dado realiza el hilo forma con el eje fijo de las x,

$$r = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad , \quad r_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

y las ecuaciones de Floquet se pueden escribir:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} - \eta \frac{\partial \alpha}{\partial s} = o$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial s} + \xi \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$
$$\rho\sigma \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} - \eta \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right] = \frac{\partial T}{\partial s} + \rho\sigma\mathfrak{F} \qquad (8)$$
$$\rho\sigma \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \xi \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right] = T\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \rho\sigma\mathfrak{Y}$$

Estas cuatro ecuaciones (8) son suficientes para determinar ξ, η, α y T en función de s y t dadas las condiciones iniciales y en los límites. Poniendo $\rho\sigma\, ds = dm$ derivando la tercera respecto á m, y multiplicando la cuarta por $\frac{\partial \alpha}{\partial m}$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial m\, \partial t} - \eta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial m\, \partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial m} = \frac{\partial^2 T}{\partial m^2} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial m}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial m} + \xi \frac{\partial \alpha}{\partial m} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = T \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m} \right)^2 + \mathfrak{D} \frac{\partial \alpha}{\partial m}$$

Restando estas dos ecuaciones, y teniendo presente el resultado de derivar la primera de las (8) respecto á t, así como la segunda de las (8) se deduce:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial m^2} - T \left[\frac{\partial \alpha}{\partial m} \right]^2 + \left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial m} - \mathfrak{D} \frac{\partial \alpha}{\partial m} \right] = - \left(\rho \sigma \right)^{-1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 \quad (9)$$

De análoga manera, multiplicando la tercera de las (8) por $\frac{\partial \alpha}{\partial m}$ y derivando la cuarta respecto á m, se tiene, sumando después los resultados y teniendo en cuenta las dos primeras ecuaciones (8), y la que se deduce de derivar la segunda respecto á t, ..

$$\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial m} \left[T^2 \frac{\partial \alpha}{\partial m} \right] + \left[\mathfrak{F} \frac{\partial \alpha}{\partial m} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial m} \right] = \left[\rho \sigma \right]^{-1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad (10)$$

Si entre las ecuaciones (9) y (10) se elimina T, se halla una ecuación diferencial que relaciona α con las variables independientes s y t.

Si el hilo deslizara según una curva, la velocidad v de todos los puntos estaría dirigida según la tangente á la curva, sería una función sólo de t, no de s. En este caso

$$\xi = v\,, \qquad \eta = \zeta = o$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = v \frac{\partial p_1}{\partial s}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} = v \frac{\partial r_1}{\partial s}$$

$$p = v p_1$$
$$r = v r_1$$
$$q = o$$

De lo cual se deduce que, haciendo el cambio de variable

$$s + \int_o^t v dt = \overline{\sigma}$$

los valores de p, q y r son sólo funciones de $\overline{\sigma}$, lo cual es evidente, ya que $\overline{\sigma}$ es la abscisa curvilínea sobre la curva realizada por el hilo en su movimiento.

Las ecuaciones dinámicas referidas á la tangente y normal, son

$$\rho \sigma \frac{dv}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \overline{\sigma}} + \rho \sigma \mathfrak{T}$$

$$\frac{\rho \sigma v^2 - T}{\overline{\rho}} = \rho \sigma \mathfrak{N}$$

las cuales pueden establecerse directamente sin dificultad.

III.—Caso de estar el hilo en una superficie.

La aplicación del principio de D'Alembert, que conduce á reemplazar en las ecuaciones del equilibrio (párrafo VI, 1.ª parte)„ la fuerza exterior por la fuerza exterior menos el producto de la aceleración por la masa, permite escribir inmediatamente las ecuaciones del movimiento de un hilo en una superficie. Se formarían así, aplicando las ya citadas ecuaciones del párrafo VI, dos sistemas de ecuaciones para el movimiento del hilo en la superficie.

Vamos ahora á deducir las intrínsecas. Si se toma como sistema de ejes de referencia la tangente, normal principal y binormal á la curva, es decir, los ejes intrínsecos de la misma, las nuevas ecuaciones sólo diferirán de las ecuaciones (6) y (7) en que en los segundos miembros de las dos últimas ecuaciones (7) figurarán los términos $N \cos \theta$ y $N \operatorname{sen} \theta$, respectivamente, siendo N la reacción normal y θ el ángulo que la normal á la superficie forma con la normal principal á

la curva, contado á partir de la normal principal y en sentido positivo. Si se tomara, en cambio, el sistema de ejes definido por la tangente á la curva, normal á la superficie y recta perpendicular á las dos anteriores, por un procedimiento análogo al seguido al deducir las ecuaciones 6 y 7, teniendo en cuenta que para los nuevos ejes $\eta = \eta_1 = \zeta_1 = o$, $\xi_1 = 1$, se tendrá

$$\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial p_1}{\partial t} = q r_1 - r q_1$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} - \frac{\partial q_1}{\partial t} = r p_1 - p r_1$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial r_1}{\partial t} = p q_1 - q p_1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} + q_1 \zeta = o$$

$$r_1 \xi - p_1 \zeta = r$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} - q_1 \xi = - q$$

$$\rho\sigma \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + q \zeta \right] = \frac{\partial T}{\partial s} + \rho\sigma \mathfrak{F}$$

$$\rho\sigma \left[r \xi - p \zeta \right] = \frac{T}{\rho} \cos \theta + \rho\sigma \mathfrak{D}_s$$

$$\rho\sigma \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} - q \xi \right] = - \frac{T}{\rho} \operatorname{sen} \theta + \rho\sigma \mathfrak{D}'_s + N$$

La curvatura geodésica $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho}$ es lo que se ha llamado $-q_1$ ya que la curvatura geodésica es la de la sección recta del cilindro cuya curva directriz es la curva que se considera sobre la superficie y cuyas generatrices son paralelas á la normal á la superficie en el punto correspondiente. El quebrado $\frac{\cos \theta}{\rho}$ representa la curvatura de la sección normal según el teorema, bien conocido, de Gauss-Meunier, es, por lo tanto, igual á r_1 , y por último, considerando el movimiento relativo de los ejes perpendiculares á la tangente en uno y otro sistema de coordenadas al pasar del s al punto $s + ds$, se hecha de ver inmediatamente, que

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\partial \theta}{\partial s} + p_1$$

Si la superficie presentara rozamiento, deberían añadirse á las dos primeras ecuaciones dinámicas, en sus segundos miembros, las componentes de la fuerza de rozamiento $-fN$, á saber

$$-fN\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}$$

$$-fN\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}$$

IV.—Forma canónica de las ecuaciones del movimiento. *

Sean q_1, q_2 y q_3 las coordenadas generales del centro de gravedad de un elemento, ligadas á las ordinarias x, y z, por las ecuaciones

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3, s, t)$$
$$y = f_2(q_1, q_2, q_3, s, t)$$
$$z = f_3(q_1, q_2, q_3, s, t)$$

Multiplicando las ecuaciones (1) por $\frac{dx}{dq_1}$, $\frac{dy}{dq_1}$, $\frac{dz}{dq_1}$ y poniendo, paar abreviar:

$$\frac{\rho\sigma}{2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right] = P$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right] = \frac{1}{2} = S$$

$$\rho\sigma\left[X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}\right] = Q_1 \quad ,$$

(*) Floquet. Comptes Rendus. 1900. II Semestre p. 97.

se tendrá, en el supuesto de que P, S y Q estén expresadas en función de q_1, q_2, q_3 s y t, la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial P}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}}\right] - \frac{\partial P}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial S}{\partial \frac{\partial q_1}{\partial s}}\right] - T\frac{\partial S}{\partial q_1} + Q_1$$

Otras dos ecuaciones análogas se obtendrían para q_2 y q_3, utilizando siempre las transformaciones que de las ecuaciones de Newton conducen, en la dinámica, á las de Lagrange (**).

Supongamos ahora que en las fórmulas de transformación, no entra explícitamente s, y que existe una función de fuerzas U (x, y, z, s, t), de modo que

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \quad , \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} \quad , \quad Q_3 = \frac{\partial U}{\partial q_3}$$

Introduzcamos los parámetros u definidos por

$$T\frac{\partial q_1}{\partial s} = u_1 \quad , \quad T\frac{\partial q_2}{\partial s} u_2 \quad , \quad T\frac{\partial q_3}{\partial s} = u_3$$

Si S' es el valor de S cuando se substituye $\frac{\partial q}{\partial s}$ por u, se tendrá:

$$2S' = T^2$$

$$\frac{\partial S'}{\partial q_1} = \frac{\partial S}{\partial q_1} T^2$$

$$\frac{\partial S'}{\partial u_1} = \frac{\partial S}{\partial \frac{\partial q_1}{\partial s}} T$$

Y las ecuaciones en la forma de Lagrange adoptarán la nueva forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial P}{\partial \frac{\partial q_1}{\partial t}}\right] - \frac{\partial P}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial S'}{\partial u_1}\right] - \frac{\partial \sqrt{2S'}}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

(**) Appell. Traité de Mecánique Rationnelle. Tomos I y II.

y habrá otras dos análogas.

Cambiando ahora de variables con las substituciones:

$$\frac{\partial P}{\partial \frac{\partial q_1}{\partial t}} = p_1 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial \frac{\partial q_2}{\partial t}} = p_2 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial \frac{\partial q_3}{\partial t}} = p_3$$

y deduciendo de estas definiciones de las p, los valores de $\frac{\partial q_1}{\partial t}$, $\frac{\partial q_2}{\partial t}$ y $\frac{\partial q_3}{\partial t}$ en función de las p, se substituirán estos valores en

$$K = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial t} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial t} + p_3 \frac{\partial q_3}{\partial t} - P$$

de modo que K será función de las p y de las q, teniendo lugar que,

$$-\frac{\partial P}{\partial q_1} = \frac{\partial K}{\partial q_1}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial p_1}$$

Del mismo modo cambiando las variables u por las w definidas por

$$\frac{\partial S'}{\partial u_1} = w_1 \, , \qquad \frac{\partial S'}{\partial u_2} = w_2 \, , \qquad \frac{\partial S'}{\partial u_3} = w_3$$

se tendrá, llamando S'' á la función obtenida al substituir las u por las w, en S',

$$-\frac{\partial S'}{\partial q_1} = \frac{\partial S'}{\partial q_1}$$

$$u_1 = \frac{\partial S''}{\partial w_1}$$

y otras ecuaciones análogas para u_2, w_2, u_3, w_3. Operando todas las transformaciones indicadas en las ecuaciones fundamentales, se tiene

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial q_1} = \frac{\partial w_1}{\partial s} + \frac{\partial \sqrt{2S''}}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

y otras dos análogas.

Finalmente, sea H la diferencia K-U. Como en U no figura $\frac{\partial q}{\partial t}$, tampoco figurará p después de la transformación primera, luego

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

Recordando la definición de la variable u, se observará que

$$T \frac{\partial q_1}{\partial s} = \frac{\partial S''}{\partial w_1}$$

ó sea

$$\frac{\partial q_1}{\partial s} = \frac{\partial \sqrt{2S''}}{\partial w_1}$$

Así pues, llamando H' á la función $\sqrt{2S''}$ las ecuaciones del movimiento de un hilo podrán adoptar la forma canónica

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial w_i}{\partial s} + \frac{\partial H'}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial s} = \frac{\partial H'}{\partial w_i}$$

Si las fórmulas de transformación no contienen al tiempo, H y H' son funciones homogéneas y de segundo grado de p y w que se deducen una de otra cambiando w^2 en $\left(\frac{p}{\rho\sigma}\right)^2$.

La tensión viene dada por

$$H' = T$$

V.—Integrales.

Multiplicando las ecuaciones (1) por u, v y w, respectivamente, sumando los resultados, multiplicando por ds la suma é integrando entre los valores límites s_1 y s_2 de s, se tendrá, llamando $\overline{V}$ á la fuerza viva total del hilo: $\overline{V} = \int_{s_1}^{s_2} (u^2 + v^2 + w^2)\, \rho\sigma\, ds$,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = \int_{s_1}^{s_2} \left(Xu + Yv + Zw \right) \rho\sigma\, ds + \int_{s_1}^{s_2} \left[u \frac{\partial}{\partial s}\left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) + v \frac{\partial}{\partial s}\left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) + w \frac{\partial}{\partial s}\left(T \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right] ds$$

Integrando por partes la última integral, y llamando T_1, T_2, Σ_1 y Σ_2 á las tensiones y velocidades según las tangentes correspondientes á los límites, se podrá escribir, teniendo en cuenta la igualdad (2),

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = \int_{s_1}^{s_2} \left(Xu + Yv + Zw \right) \rho\sigma\, ds + T_2 \Sigma_2 - T_1 \Sigma_1$$

Del mismo modo, multiplicando cada una de las ecuaciones (1) por $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$ respectivamente, sumando ordenadamente los resultados, multiplicando por dt la suma, é integrando después entre t_1 y t_2

$$\rho_2 \sigma_2 \Sigma_2 - \rho_1 \sigma_1 \Sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial T}{\partial s} + \rho\sigma \mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial s} \rho\sigma \left(u^2 + v^2 + w^2 \right) \right] dt$$

Las dos ecuaciones que se acaban de obtener, pueden expresarse de otro modo (*), en el supuesto de derivar la fuerza de una función U, á saber:

(*) Appell, Annaes da Academia Polytechnica do Porto, Coimbra, 1909.

$$\frac{\partial \left[T\,\Sigma\right]}{\partial s} = \frac{\partial \left[\frac{\rho\sigma\, V^2}{2} - \rho\sigma\, U\right]}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \left[\rho\sigma\,\Sigma\right]}{\partial t} = \frac{\partial \left[T + \frac{\rho\sigma V^2}{2} + \rho\sigma\, U\right]}{\partial s}$$

hibiendo puesto $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Las dos ecuaciones en la forma anterior, expresan que si P y Q son funciones convenientes de s y t, se tendrá el sistema de cuatro ecuaciones:

$$T\,\Sigma = \frac{\partial P}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\rho\sigma\, V^2}{2} - \rho\sigma\, U = \frac{\partial P}{\partial s}$$

$$\rho\sigma\,\Sigma = \frac{\partial Q}{\partial s} \quad ; \quad T + \frac{\rho\sigma\, V^2}{2} + \rho\sigma\, U = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Las funciones P y Q no son independientes, pues hay entre ellas la ecuación que resulta al eliminar Σ, $\rho\sigma\, V^2$ y T entre las cuatro ecuaciones anteriores, á saber:

$$\frac{\partial \left[\rho\sigma\,\Sigma\right]}{\partial t} = \frac{\partial \left[T + \frac{\rho\sigma\, V^2}{2} + \rho\sigma\, U\right]}{\partial s}$$

En ciertos casos particulares, pueden obtenerse inmediatamente integrales; verbigracia, si la fuerza exterior es constantemente paralela al plano de las $y\ z$, la primera de las ecuaciones (1) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[T\frac{\partial x}{\partial s}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\sigma\frac{\partial x}{\partial t}\right]$$

de lo cual se deduce, que si P es una función conveniente,

$$T\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad , \quad \rho\sigma\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial s}$$

De un modo análogo si la fuerza exterior corta constantemente al eje z, se puede formar la combinación de momentos de la que se deduce:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[T\left(x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right]=\rho\sigma\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\sigma\left(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]$$

Y, por lo tanto, si Q es una unción conveniente,

$$T\left[x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}\right]=\frac{\partial Q}{\partial t}\quad;\quad\rho\sigma\left[x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}\right]=\frac{\partial Q}{\partial s}$$

VI.—Distribución de tensiones impulsivas y movimiento inicial que sigue á una perturbación.

Sea un hilo en movimiento ó en reposo. Imaginemos que en un punto del mismo, verbigracia en uno de los extremos, la tensión varía buscamente en un tiempo t_2-t_1 pequeñísimo. A la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} T\,dt$$

la llamaremos tensión impulsiva, y representaremos por T'. Vamos á ver como varía la tensión impulsiva á lo largo del hilo. Las fuerzas exteriores, en el pequeñísimo intérvalo t_2-t_1 pueden considerarse constantes, y sus impulsiones nulas. En cuanto á los elementos cinemáticos del hilo, sólo experimentarán variación brusca ξ, η, q y r (notaciones del párrafo 2), ya que la tensión impulsiva se transmite según la tangente. Sean ξ', η' q' y r' estas variaciones bruscas, entde las cuales habrá las siguientes relaciones que se deducen de las tres últimas ecuaciones (6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi'}{\partial s}&=\eta' r_1\\ \frac{\partial\eta'}{\partial s}&=r'-\xi' r_1\\ o&=-\eta' p_1-q'\end{aligned}\qquad(12)$$

Ahora bien, multiplicando por dt las ecuaciones (7), é integrando entre t_2 y t_1 se tendrá, en virtud de lo dicho

$$\rho\sigma\xi' = \frac{\partial T'}{\partial s}$$

$$\rho\sigma\eta_1' = T' r_1 \qquad (13)$$

$$o = o$$

Derivando la primera de las ecuaciones (13) respecto á s y teniendo en cuenta la primera de las (12) y segunda de las (13), se tendrá

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\rho\sigma}\frac{\partial T'}{\partial s}\right] = \frac{T' r_1^2}{\rho\sigma}$$

Esta ecuación da la distribución de tensiones impulsivas dadas las condiciones en los límites. Las demás ecuaciones 12 y 13 dan, una vez conocido T' en función de s, los valores de ξ', η' q' y r' para cada punto del hilo, ó sea la perturbación cinemática del movimiento.

El segundo de los problemas que vamos á tratar en este párrafo, consiste en lo que sigue: Supongamos un hilo en movimiento, siendo éste conocido. En un momento dado, se rompe el hilo en un punto. Se pregunta el movimiento inicial de los diversos elementos del hilo roto. Al modo como se va á tratar la rotura, pueden tratarse perturbaciones análogas. Para resolver problemas de esa índole se puede proceder como á continuación se indica para el caso en que se mueva el hilo en un plano (*). Ya que el movimiento en el instante anterior á la rotura es conocido, y por lo tanto, según las notaciones del capítulo 2, se conocen ξ, η y $\frac{\partial x}{\partial t}$ en función de s; y, como, por otra parte las fuerzas exteriores son datos en el problema, la ecuación 9 representará la variación de T según s ó m, es decir, integrada "teniendo en cuenta las nuevas condiciones en los límites que introduce la rotura", nos proporcionará T en función de s. Conocida T, la ecuación 10 da $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$, y las condiciones dinámicas (8) los valores de $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ y $\frac{\partial \eta}{\partial t}$. Derivando las ecuaciones (8) (9) y (10) respecto al tiempo, las nuevas ecuaciones pueden determinarnos las sucesivas derivadas parciales de T, de α, ξ y η respecto al tiempo. Con ellas, supuesto desarrollado el valor de una cualquiera de las cantidades T, α, ξ y η en serie de Maclaurin, se tendrá , verbigracia

$$T = T_o + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_o t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_o \frac{t^2}{2} + \cdots$$

(*) Routh, l. c.

suponiendo contados los tiempos, á partir del instante en que tiene lugar la rotura. Los subíndices indican que los cocientes diferenciales y T_o representan los valores correspondientes al instante que sigue á la rotura.

La ecuación (9) es de la forma

$$\frac{d^2 T}{d m^2} + p\, T = \varphi$$

siendo p y φ funciones de m. La solución debe cumplir las condiciones límites, ser, verbigracia, igual á T_1 para $m = m_1$ é igual á T_2 para $m = m_2$

Pongamos.

$$T = \frac{1}{m_1 - m_2}\left[T_1 (m - m_2) - T_2 (m - m_1)\right] + R$$

La función R deberá satisfacer á una ecuación de la forma

$$\frac{d^2 R}{d m^2} + p R = q \qquad (14)$$

siendo p y q funciones de m, con las condiciones límites $R = o$ para $m = m_1$ y $m = m_2$

La resolución de la última ecuación con las condiciones límites indicadas puede reducirse á la de una ecuación integral. En efecto: la ecuación

$$\frac{d^2 r}{d m^2} = q (m) \qquad (15)$$

con las condiciones límites $r = o$ para $m = m_1$ y $m = m_2$ $(m_2 > m_1)$, tiene la solución

$$r (m) = \int_{m_1}^{m} q (m')\, m' (m - 1)\, d m' = \int_{m}^{m_2} q (m')\, m (m' - 1)\, dm'$$

Si se divide el intérvalo $m_1 \leqq m' \leqq m_2$ en dos partes $m_1 \leqq m' \leqq m$, y $m \leqq m' \leqq m^2$ en la primera parte

$$m > m' \ , \qquad \left| m - m' \right| = m - m' \ ,$$

y, por lo tanto,

$$m m' + \frac{1}{2} \left| m - m' \right| - \frac{1}{2} \left[m + m' \right] = m m' - m' = m' (m - 1)$$

En la segunda parte,

$$m < m' \quad , \quad \left| m - m' \right| = m' - m$$

y, por lo tanto,

$$m m' + \frac{1}{2} \left| m - m' \right| - \frac{1}{2} \left[m + m' \right] = m m' - m = m (m' - 1)$$

luego el valor de $r\,(m)$ se puede poner en la forma:

$$r (m) = \int_{m_1}^{m_2} q (m') \left\{ m m' + \frac{1}{2} \left| m - m' \right| - \frac{1}{2} (m + m') \right\} d m' \qquad (16)$$

Ahora bien, de (15) se pasa á (14), poniendo en vez de $q\,(m)$, $q\,(m) - p\,R$, y en vez de $r\,(m)$, $R\,(m)$. Luego de (16) se pasará á la solución de (14) haciendo las mismas substituciones, de modo que la solución de (14) con las condiciones impuestas en los límites, es el valor de R que satisface á la siguiente ecuación integral de segunda especie:

$$R (m) = S (m) - \int_{m_1}^{m_2} p (m') R (m') K (m, m') d m'$$

siendo

$$S (m) = \int_{m_1}^{m_2} q (m') K (m, m') d m'$$

$$K (m, m) = m m' + \frac{1}{2} \left| m - m' \right| - \frac{1}{2} (m + m')$$

La ecuación integral puede resolverse por el procedimiento de Fredholm, por las series de Schmidt, etc.

VII.—Del movimiento estacionario de un hilo.

Se dirá de un hilo que tiene movimiento estacionario respecto de un sistema de ejes móviles, cuando deslice según una curva geométrica fija con relación á dichos ejes móviles. Las ecuaciones del movimiento referidas á los ejes móviles, serán las ecuaciones (11), añadiendo á los segundos miembros las componentes de las fuerzas de arrastre y complementaria, mas la ecuación que se obtiene al escribir que las componentes de la fuerza exterior según la binormal á la curva trayectoria y de las fuerzas de arrastre y complementaria se equilibran.

Se tiene así un sistema de tres ecuaciones, al que añadida la condición de inextensibilidad (2), forman cuatro ecuaciones, susceptibles de determinar x, y, z y T. Para que los valores obtenidos sean soluciones, es preciso que x, y y z sean sólo funciones de $\overline{\sigma}$, representando la curva trayectoria, y que, además, v sea sólo función de t. Sean ξ, η, y ζ las componentes coordenadas, sobre los ejes móviles, de la velocidad del origen de los mismos ejes; sean p, q y r las componentes de la velocidad de rotación instantánea. Estas cantidades son funciones de t. La velocidad en el movimiento de arrastre, para un punto de coordenadas, x y z, tiene por componentes:

$$\begin{aligned} \xi + z\,q - y\,r &= v_x \\ \eta + x\,r - z\,p &= v_y \\ \zeta + y\,p - x\,q &= v_z \end{aligned}$$

La aceleración de arrastre será la que tiene por componentes

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d\xi}{dt} + z\frac{dq}{dt} - v\frac{dr}{dt} - \left(r v_y - q v_z\right) \\ a_y &= \frac{d\eta}{dt} + x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} - \left(p v_z - r v_x\right) \\ a_z &= \frac{d\zeta}{dt} + y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} - \left(q v_x - p v_y\right) \end{aligned}$$

Las componentes de la fuerza de arrastre, son

$$-\rho\sigma a_x$$
$$-\rho\sigma a_y$$
$$-\rho\sigma a_z$$

respectivamente.

Las componentes de la aceleración complementaria, valen:

$$c_x = 2\left[\frac{\partial z}{dt}q - \frac{\partial y}{dt}r\right]$$
$$c_y = 2\left[\frac{\partial x}{dt}r - \frac{\partial z}{dt}p\right]$$
$$c_z = 2\left[\frac{\partial y}{\partial t}p - \frac{\partial x}{\partial t}q\right]$$

La fuerza complementaria, en el movimiento relativo, tiene por componentes

$$-\rho\sigma c_x$$
$$-\rho\sigma c_y$$
$$-\rho\sigma c_z$$

respectivamente.

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento relativo serán, siendo r el radio de segunda curvatura,

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\sigma\frac{dv}{dt} = \frac{\partial T}{\partial s} + \rho\sigma\mathfrak{F} - \rho\sigma\left[a_x\frac{\partial x}{\partial s} + a_y\frac{\partial y}{\partial s} + a_z\frac{\partial z}{\partial s}\right]\\
&\frac{\rho\sigma v^2 - T}{\bar{\rho}} = \rho\sigma\mathfrak{N} - \bar{\rho}\rho\sigma\left[(a_x+c_x)\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + (a_y+c_y)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + (a_z+c_z)\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right]\\
&\mathfrak{N}' + \mathfrak{F}\left[(a_x+c_x)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\bar{\rho}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right) + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial x}{\partial s}\right] + (a_y+c_y)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\bar{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right) + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial y}{\partial s}\right]\right.\\
&\qquad\left. + (a_z+c_z)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\bar{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right) + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial z}{\partial s}\right]\right] = 0
\end{aligned}\right\}\ 17$$

Floquet se ha ocupado en algunos casos de ese movimiento que hemos llamado estacionario. Ha demostrado (*) que es posible un movimiento estacionario

(*) Comptes-Rendus, 1900.

sobre una curva cuyas tangentes tengan la misma inclinación con el horizonte, para cuando las fuerzas exteriores son funciones de la velocidad, y el movimiento de los ejes de referencia es de traslación según el eje de las z, supuesto vertical; en el mismo trabajo señaló la existencia de un movimiento en circunferencia cuyo plano pasa por el eje de las x, siendo la velocidad v constante, y el movimiento de los ejes de rotación uniforme alrededor del eje de las z. En otro trabajo (*) consideró el primer problema mencionado cuando el hilo es de igual resistencia; anteriormente (**) había tratado el caso de un hilo sometido sólo á la fuerza complementaria y á fuerzas tangenciales de rozamiento en el movimiento últimamente definido de los ejes móviles, considerando el movimiento de un hilo en un plano horizontal. De problemas análogos parece haberse ocupado Apel (***). Cuando los ejes de referencia se hallan animados del movimiento rectilíneo de traslación, uniforme, ha sido objeto de atención en el estudio de la forma estacionaria de un cable cuando un buque lo tiende en el mar, y por último, si los ejes de referencia están fijos, las ecuaciones 11 pueden utilizarse para resolver los problemas de transmisión teledinámica. En la exposición que sigue vamos á ocuparnos de tres casos de movimiento estacionario, á saber: 1.º Caso en que el movimiento de los ejes de referencia es una rotación con velocidad angular constante alrededor del eje de las z; 2.º Caso en que el movimiento de los ejes es un traslación rectilínea y uniforme; 3.º Caso de ejes fijos.

En el examen del movimiento estacionario caben varios problemas. Se nos pueden dar el movimiento de los ejes de referencia y las fuerzas exteriores, determinando entonces si es posible el movimiento, según que curvas y con que ley de velocidad; ó nos pueden dar los ejes y las curvas preguntando por las fuerzas, ó finalmente las fuerzas y la naturaleza de las curvas estacionarias pidiéndose el movimiento de los ejes. En esta memoria sólo nos ocupamos del primer problema.

VIII. — Del movimiento estacionario de un hilo cuando los ejes de referencia giran alrededor del eje de las z con velocidad angular w constante.

Supondremos que las fuerzas exteriores por unidad de masa se hallan en el plano osculador de la curva y con funciones sólo de la velocidad v, ó lo que es igual, de t. De modo que T y N serán funciones exclusivamente de t y N' será nulo en todo punto.

(*) Bulletin de la Faculté des Sciences de Nancy, 1900.

(**) Id., 1897.

(***) Acta mathematica.

Los valores de a_x, a_y, a_z, c_x, c_y y c_z serán los que á continuación se indican

$$a_x = -w^2 x \qquad c_x = -2\frac{\partial v}{\partial t} w = -2wv\frac{dy}{d\bar{\sigma}}$$

$$a_y = -w^2 y \qquad c_y = 2wv\frac{dx}{d\bar{\sigma}}$$

$$a_z = o \qquad c_z = o \quad ;$$

con los cuales las ecuaciones 17 llamando λ, μ y ν á los cosenos directores de la binormal, se convertirán en las siguientes:

$$18\begin{cases}\rho\sigma\left[\frac{dv}{dt} - \mathfrak{T}\right] = \frac{\partial T}{\partial s} + \rho\sigma\left[w^2 x\frac{dx}{d\bar{\sigma}} + w^2 y\frac{dy}{d\bar{\sigma}}\right] \\ \rho\sigma\left[v^2 - \mathfrak{N}\bar{\rho}\right] = T + \rho\sigma\bar{\rho}^2\left[w^2 x\frac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2} + w^2 y\frac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2} + 2wv\left[\frac{dy}{d\bar{\sigma}}\frac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2} - \frac{dx}{d\bar{\sigma}}\frac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2}\right]\right] \\ \left(-w^2 x - 2w\frac{dy}{d\bar{\sigma}}v\right)\lambda + \left(-w^2 y + 2w\frac{dx}{d\bar{\sigma}}v\right)\mu = o\end{cases}$$

A la última de las ecuaciones escritas se puede dar la forma:

$$w^2(\lambda x + \mu y) = 2wv\left(\frac{dx}{d\bar{\sigma}}\mu - \frac{dy}{d\bar{\sigma}}\right)$$

Ahora bien, el primer miembro es sólo función de $\bar{\sigma}$, el segundo es el producto de v, que es sólo función de t, por una función sólo de $\bar{\sigma}$. Luego una de dos, ó v es constante, ó cada una de las indicadas funciones de $\bar{\sigma}$ es cero. En este último caso

$$x\lambda + y\mu = o$$

$$-\frac{dx}{d\bar{\sigma}}\lambda + \frac{dy}{d\bar{\sigma}}\mu = o$$

Estas dos condiciones implican que, ó bien

$$\lambda = o \qquad \mu = o$$

y en este caso la curva es plana, y su plano normal al eje de giro, ó bien, si λ y μ pueden admitir valores distintos de cero, es preciso que

$$\begin{vmatrix} x & y \\ -\frac{dy}{d\sigma} & \frac{dx}{d\sigma} \end{vmatrix} = o$$

ó sea, que

$$x^2 + y^2 = Const. = k^2$$

En este caso los valores de λ y μ son proporcionados á sus menores complementarias, pudiéndose tomar, verbigracia

$$\lambda = c\,x \quad , \qquad \mu = c\,y$$

Como quiera que

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \quad .$$

$$\nu^2 = 1 - \lambda^2 - \mu^2 = 1 - c^2 k^2 = const.$$

La curva trayectoria es, por lo tanto, una hélice circular.

Por consiguiente si el movimiento estacionario en las condiciones indicadas es posible, y la velocidad no es constante, la curva trayectoria ó es plana, ó es una hélice circular cuyo eje es el de rotación de los de referencia. Si la constante k fuera nula, el movimiento tendría lugar según el eje de las z; en ese caso $\mathfrak{M}$ debiera ser nula.

Veamos, en el caso de ser la velocidad variable, qué condiciones imponen al movimiento las dos primeras ecuaciones (18). Introduciendo en ellas la distancia r de un punto de la curva al eje, distancia dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

aquellas ecuaciones se convierten en las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \rho\sigma\left[\frac{dv}{dt} - \mathfrak{F}\right] &= \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\rho\sigma w^2}{2}\frac{dr^2}{d\overline{\sigma}} \\ \rho\sigma\left[v^2 - \bar{\rho}\,\mathfrak{V}\right] &= T + \rho\sigma\left[\frac{w^2}{2}\bar{\rho}^2\left(\frac{d^2r^2}{d\sigma^2} - 2\right) + 2wv\bar{\rho}\right] \end{aligned}\right\} 18\text{ bis}$$

Eliminando T entre esas dos ecuaciones, para lo cual se derivará la segunda respecto á s y llevará $\frac{\partial T}{\partial s}$ á la primera, se deduce

$$\rho\sigma\left[\frac{dv}{dt} - \mathfrak{F}\right] = v^2\frac{d(\rho\sigma)}{ds} + (2wv - \mathfrak{V})\frac{\partial(\rho\sigma\bar{\rho})}{\partial s} + \frac{w^2\sigma\rho}{2}\frac{dr^2}{d\overline{\sigma}} - \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho\sigma w^2}{2}\bar{\rho}^2\left[\frac{d^2r^2}{d\sigma^2} - 2\right]\right]$$

que tiene la forma:

$$\frac{dv}{dt} - \mathfrak{F} - v^2 S_0 - (2wv - \mathfrak{V})S_1 - w^2 S_2 = o \qquad (19)$$

siendo:

$$S_0 = \frac{1}{\rho\sigma}\frac{d(\rho\sigma)}{ds} \qquad (20)$$

$$S_1 = \frac{1}{\rho\sigma}\frac{\partial(\rho\sigma\bar{\rho})}{\partial s} \qquad (21)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\frac{dr^2}{d\overline{\sigma}} - \frac{1}{2\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial s}\left[\rho\sigma\bar{\rho}^2\left[\frac{d^2r^2}{d\sigma^2} - 2\right]\right] \qquad (22)$$

Ahora bien, en la ecuación (19) $\frac{dv}{dt} - T, v^2$ y $2wv - \mathfrak{V}$ son funciones exclusivamente de v, y, en S_0, S_1, S_2 figuran funciones que dependan sólo de s y $\overline{\sigma}$ Luego para que pueda satisfacerse para todo valor de t y todo valor de s, es preciso y basta que S_0, S_1 y S_2 se reduzcan á funciones de t, á menos que la velocidad v sea constante. Así, pues, si v no es constante, se tendrá, siendo k_0, k_1 y k_2 funciones de t que pueden reducirse á simples constantes,

$$S_0 = k_0\ , \qquad S_1 = k_1\ , \qquad S_2 = k_2 \qquad (23)$$

Ahora bien, de la ecuación 20 se deduce $k_0 = const$, puesto que $\rho\sigma$ sólo puede ser función de s, y por consiguiente

$$\rho\sigma = \rho_o \sigma_o e^{k_o s}$$

Luego la masa por unidad de longitud, si la velocidad no es constante, debe seguir una ley exponencial.

Las consideraciones que preceden se aplican lo mismo á la hélice que al caso de curva plana. Para el caso en que la curva tractoria es una hélice, se tiene $\rho = const. = R$, $r = const.$ y de las ecuaciones 21 y 22 se deduce que k_1 y k_2 son sonstantes y que

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_1}{k_o} = R$$

Las ecuaciones (23) son así compatibles. La (19) será:

$$\frac{dv}{dt} - \mathfrak{F} + k_o R\, \mathfrak{D}\mathfrak{T} = k_o \left[v + w R\right]^2 \qquad (24)$$

Esta ecuación es la del movimiento en la trayectoria. La tensión viene dada por.

$$T = \rho\sigma \left[(v + w R)^2 - R\, \mathfrak{D}\mathfrak{T}\right] \qquad (25)$$

El movimiento será posible mientras el paréntesis sea positivo.

Examinemos ahora el caso en que siendo la velocidad variable, la trayectoria es una curva plana. Es fácil ver, que, en toda curva plana,

$$\frac{1}{\rho}\left[2 - \frac{d^2 r^2}{d\sigma^2}\right] = \sqrt{4r^2 - \left(\frac{dr^2}{d\sigma}\right)^2} \qquad (26)$$

Llevando el valor del primer miembro á la ecuación 22, efectuando la derivación según s y teniendo (26) en cuenta, se tiene

$$2\frac{dr^2}{d\sigma} + k_1 \sqrt{4r^2 - \left(\frac{dr^2}{d\sigma}\right)^2} = 2k_2 \qquad (27)$$

Eliminando el radical entre 26 y 27, sale

$$\frac{d^2 r^2}{d\bar{\sigma}} + \frac{2}{\bar{\rho} k_1}\left[k_2 - \frac{d r^2}{d\bar{\sigma}}\right] - 2 = o \qquad (28)$$

Derivando 27 respecto á s,

$$\frac{d^2 r^2}{d\bar{\sigma}^2} + \frac{k_1}{2}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d r^2}{d\bar{\sigma}} = o \qquad (29)$$

k_1 es por lo tanto constante, y por consiguiente k_2 también.

De 28 y 29 se deduce

$$(4 + k_1^2)\frac{d r^2}{d\bar{\sigma}} = 4 k_2 - 4\bar{\rho} k_1 \qquad (30)$$

Pero las ecuaciones (20) y (21) nos dan el valor de $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = \frac{k_1}{k_0} + \frac{k'_3}{\rho_0 \sigma_0} e^{-k_0 s}$$

siendo k'_3 una función de t que es fácil determinar, puesto que ρ ha de ser función sólo de $\bar{\sigma}$. Luego

$$k'_3 = k_3 e^{-k_0 \int_0^t v dt}$$

con lo que

$$\bar{\rho} = \frac{k_1}{k_0} + \frac{k_3}{\rho_0 \sigma_0} e^{-k_0 \bar{\sigma}} \qquad (31)$$

Llevando este valor de ρ á (30) y derivando respecto á s, se halla :

$$(4 + k_1^2)\frac{d^2 r^2}{d\sigma^2} = \frac{4 k_0 k_1 k_3}{\rho_0 \sigma_0} e^{-k_0 \bar{\sigma}} \qquad (32)$$

En virtud de 30, 31 y 32, la ecuación 29 se convierte en

$$k_1\left[\frac{k_1}{k_0}+\frac{k_3}{\rho_0\,\sigma_0}\,e^{-k_0\overline{\sigma}}\right]\left[\frac{4\,k_0\,k_3}{\rho_0\,\sigma_0}\,e^{-k_0\overline{\sigma}}-2\,k_1\right]+2\,k_1\,k_2=0$$

la cual debe quedar satisfecha para todo valor de $\overline{\sigma}$. Pero en este caso es preciso que

$$k_1=0$$

ó bien, si $k_1 \mp 0$,

$$k_2\,k_0-k_1^2=0$$
$$k_3=0$$

En el primer caso, la ecuación (27) da

$$r^2=k_2\overline{\sigma}+k_4$$

siendo k_4 una constante. Pero entonces la (26), teniendo en cuenta (25) nos dice que es preciso que

$$4\,(k_2\overline{\sigma}+k_4)^2-k_2^2=\frac{4\,k_3^2}{\rho_0^2\,\sigma_0^2}\,e^{-2\,k_0\overline{\sigma}_0}$$

para todo valor de $\overline{\sigma}$ lo cual es imposible, á menos que

$$k_2=k_0=0$$
$$r^2=k_4=\frac{k_3}{\rho_0\,\sigma_0}$$

es decir, el hilo debe ser homogéneo, y la trayectoria es una circunferencia cuyo centro está en el eje z, siendo el radio $R=\sqrt{\frac{k_3}{\rho_0\,\sigma_0}}$. Las ecuaciones (23) son compatibles con el movimiento cuya ley es

$$\frac{dv}{dt}-\mathfrak{F}=0$$

La tensión viene dada por

$$T = \rho_o \sigma_o \left[V^2 - R \mathfrak{V} \right]$$

siendo V la velocidad absoluta, igual á $v + w R$.

En el segundo caso, en que $k_1 k_o = k_1^2 y k_3 = o$, el radio de curvatura dado por (31) es constante, y su valor $\frac{k_1}{k_o}$ ó $\frac{k_2}{k_1}$. Las ecuaciones (23) son compatibles y la ley del movimiento es

$$\frac{d V}{d t} - \mathfrak{F} + k_o R \mathfrak{V} = k_o V^2$$

siendo la tensión

$$T = \rho_o \sigma_o \left[V^2 - R \mathfrak{V} \right]$$

En resumen, y prescindiendo del caso banal en que el hilo se mueve á lo largo del eje de las z, podemos decir que, si el movimiento estacionario en las condiciones dichas es posible, ó bien la velocidad es constante, ó la curva trayectoria es congruente en cada una de sus partes de igual longitud, excluyendo la recta, esto es, ó es una hélice circular ó una circunferencia. La ley de la masa por unidad de longitud ó es constante ó es exponencial.

Como corolario del teorema que acabamos de demostrar, vemos que, si el hilo es uniforme y la fuerza tangencial es nula, la velocidad es necesariamente constante.

En el capítulo siguiente nos ocuparemos de trayectoria descrita en esas condiciones, suponiendo además $\mathfrak{V} = o$

IX.—Caso particular en que la velocidad de deslizamiento es constante.

Supongamos que las fuerzas exteriores que sobre el elemento ds obran son nulas. Si al mismo tiempo el hilo es uniforme, $\rho \sigma = 1$, y según lo demostrado en el párrafo anterior, la velocidad v es necesariamente constante. La fuerza tangencial de inercia no interviene ya, y sólo introduce el movimiento la fuerza centrífuga de inercia $\frac{v^2}{\rho}$ la cual podemos considerar unida á la fuerza centípreta $\frac{T}{\rho}$ constituyendo la resultante de ambas una fuerza $\frac{T'}{\rho}$. El elemento de hilo se

hallará sometido á las fuerzas exteriores que resultan del movimiento relativo, á la tensión $\frac{\partial T}{\partial s} ds = \frac{\partial T'}{\partial s} ds$ según la tangente, y á la tensión $\frac{T'}{\rho}$ según la normal principal interna. Luego la figura del movimiento estacionario es la del equilibrio de un hilo sometido á las fuerzas exteriores que dimanan del movimieno relativo la centrífuga ordinaria y la compuesta. Resuelto el problema de equilibrio y siendo T' la tensión correspondiente, la tensión del hilo en movimiento estacionario es

$$T = T' + v^2 \tag{33}$$

Las ecuaciones de este movimiento serán por lo tanto las del equilibrio poniendo T' en vez de T. Así, pues, pasando ya á integrales primeras, expresaremos que el incremento de tensión T' mas el trabajo de las fuerzas exteriores al pasar de s á $s + ds$ es nulo (pág. 6, for. 8).

$$d T' + \frac{w^2}{2} (x\, dx + y\, dy) = o$$

que, integrada, da

$$T' + \frac{w^2}{2} r^2 = k_1 \tag{34}$$

En segundo lugar, escribamos que la suma del momento de las fuerzas exteriores respecto del eje z, más el incremento en el momento de la tensión es nula, condición evidente del equilibrio:

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \frac{d\varphi}{ds} T'\right) ds - 2 w v \left[x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds}\right] ds = o$$

que, integrada, dé

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} T' - w v r^2 = k^2 \tag{35}$$

Y, por último, se observará que siendo todas las fuerzas exteriores normales al eje de las z, la proyección de la tensión T' sobre el mismo eje, es constante luego

$$T' \frac{dz}{ds} = k_3 \tag{36}$$

Las ecuaciones (34), (35) y (36), con la condición geométrica de inextensibilidad

$$r^2 (d\varphi)^2 + (dr)^2 + (dz)^2 = (ds)^2 \tag{37}$$

permiten la resolución del problema, es decir, expresar r, φ, s y z, en función de T' por ejemplo, suponiendo á T' variable.

Se ve inmediatamente que si T' fuera constante, las ecuaciones de equilibrio imponen que la curva sea una hélice circular. En efecto, suponiendo T' diferente de cero, la (36) da

$$\frac{dz}{ds} = k'_3$$

y la (34) expresa que r es constante. En esas condiciones la 35 nos dice que φ es proporcional á s, con lo cual queda establecido que la curva de equilibrio es una hélice circular. Si T' fuera nulo, de las ecuaciones 34, 35 y 36 sólo se saca $r =$ constante, pero de la ecuación intrínseca 18 bis segunda, se saca $\frac{1}{\rho} =$ constante. Claro está que en uno y otro caso la hélice puede reducirse á la circunferencia que la proyecta sobre un plano normal al eje del giro.

Suponiendo pues T' variable, vamos á expresar r, φ, s y z en función de T'. El valor de r viene dado por 34

$$r^2 = -\frac{2(k_1 - T')}{w^2} \tag{38}$$

de donde

$$r dr = \frac{dT'}{w^2}$$

Llevando el valor de r^2 á (35), se tendrá

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{w k_2 + 2 v k_1 - 2 v T'}{w T'}$$

Pero la (37) se puede escribir, multiplicando por r^2 todos sus términos,

$$r^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = r^2 - r^4\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

Llevando á esta ecuación los valores de $\frac{rdr}{ds}$, $\frac{r^2 d\varphi}{ds}$ y $\frac{dz}{ds}$ que se deducen de las fórmulas anteriores, resulta

$$\frac{1}{w^4}\left(\frac{dT'}{ds}\right)^2 = 2\frac{(k_1 - T')}{w^2} - \frac{(wk_2 + 2vk_1 - 2vT')^2}{w^2 T'^2} - \frac{2(k_1 - T')}{w^2}\frac{k_3^2}{T'^2}$$

$$= \frac{1}{T'^2 w^2}\left[2(k_1 - T')(T'^2 - k_3^2) - (k_2 w + 2vk_1 - 2vT')^2\right]$$

$$= \frac{1}{T'^2}\frac{1}{w^2} R(T')$$

habiendo puesto para simplificar

$$R(T') = 2(k_1 - T')(T'^2 - k_3^2) - (wk_2 + 2vk_1 - 2vT')^2$$

Por consiguiente

$$w\,ds = \frac{T'\,dT'}{\pm\sqrt{R}}$$

esta expresión nos da s en función de T' é invirtiendo la integral, T' en función de s. El valor de z, así como el valor de φ vienen dados por las integrales elípticas:

$$z = \frac{k_3}{w}\int \frac{dT'}{\pm\sqrt{R}}$$

$$\varphi = \int \frac{wk_2 + 2vk_1 - 2vT'}{2(k_1 - T')}\,\frac{dT'}{\pm\sqrt{R}}$$

En el reposo relativo, para $v = o$, como entonces no interviene la fuerza centrífuga compuesta, se tienen las ecuaciones de la cuerda de saltar.

Como aplicación de las fórmulas anteriores vamos á estudiar la forma de la curva plana que se obtiene al obligar á una cuerda sin fin á girar alrededor de un árbol fijo, prescindiendo de la gravedad. La cuerda se aplica sobre el árbol sin deslizar sobre la superficie del mismo. Por lo tanto, la velocidad en el mo-

vimiento estacionario, según la misma curva, es igual á $w\ r_1$ siendo r_1 el radio del árbol fijo cuyo eje coincide con el de las z ó de rotación de los ejes móviles. El plano del movimiento estacionario del hilo se supone ser el de las xy.

Sea T'_1 el valor de T' en el punto A en que la curva que estudiamos abandona al árbol.

En este punto el radio vector r de la curva es igual al radio r_1. Luego la constante k_1 resultará de la condición

$$r_1^2 = \frac{2\,(k_1 - T'_1)}{w^2}\ ,$$

que dá

$$2\,k_1 = 2\,T'_1 + r_1^2\,w^2$$

En el mismo punto A, el ángulo θ que la tangente forma con el radio vector es 90 grados. Pero se observará que tal como están tomadas las direcciones de s (positiva en sentido del movimiento del hilo según la curva que realiza en el movimiento estacionario) y de φ (positiva en el sentido del movimiento de rotación de los ejes de referencia),

$$-\,r\,\frac{d\,\varphi}{d\,s} = sen\ \theta$$

Y, por lo tanto, para el punto A,

$$\left(-\,r\,\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)_A = 1$$

Esta condición nos dá el valor de la constante k_2 en función de T'_1. Recordando, en efecto, el valor de $r^2\,\frac{d\,\varphi}{d\,s}$ y que $v = r_1\,w$,

$$-\,r_1\,\frac{w\,k_2 + 2\,w\,r_1\,k_1 - 2\,w\,r_1\,T'_1}{w\,T'_1} = \frac{k_2 + r_1^3\,w^2}{T'_1}$$

luego

$$k_2 = -\,r_1\left[T'_1 + r_1^2\,w^2\right]$$

Llevando esos valores de k_1 y k_2 al de R, después de haber hecho en él $k_3 = o$ por tratarse de una curva situada en el plano xy, se tendrá

$$R = 2\left[T'_1 - T' + \frac{r_1^2 w^2}{2}\right] T'^2 - w^2 r_1^2 \left[T'_1 - 2T'\right]^2$$

$$= \left[T'_1 - T'\right]\left[2T'^2 + 3w^2 r_1^2 T' - T'_1 w^2 r_1^2\right]$$

$$= 2\left[T'_1 - T'\right]\left[T' - T_a\right]\left[T' - T_b\right]$$

siendo

$$\left.\begin{matrix} T_a \\ T_b \end{matrix}\right\} = -\frac{3}{4} w^2 r_1^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16} w^4 r_1^4 + \frac{w^2 r_1^2}{2} T'_1}$$

Los valores de r^2_1 y $r^2 \frac{d\varphi}{ds}$ en función de la variable T' y la constante T'_1, son

$$r^2 = r_1^2 + \frac{2(T'_1 - T')}{w^2}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = r_1 \frac{T'_1 - 2T'}{T'}$$

y, por lo tanto, los valores de s y φ vienen dados por las integrales

$$s = \frac{1}{w} \int \frac{T' \, d\, T'}{\pm \sqrt{R}}$$

$$\varphi = w r_1 \int \frac{T'_1 - 2T'}{r_1^2 w^2 + 2(T'_1 - T')} \frac{d\, T'}{\pm \sqrt{R}}$$

Los valores que se dén á T' están sujetos á dos limitaciones. Es necesario que

$$R > o$$

para que su raíz cuadrada sea real, y, además, por ser la tensión T positiva, es preciso que

$$w^2 r_1^2 + T' > o$$

De esa segunda limitación se deduce que las raíces de $R = o$ son reales y T_a diferente de T_b. En efecto, si ocurre lo contrario, se tendría

$$-\frac{9}{16} w^2 r_1^2 + \frac{8}{16} T'_1 \leq o$$

desigualdad evidentemente incompatible con la anterior.

Para examinar la condición $R > o$ distinguiremos tres casos, que T'_1 sea negativa cero ó positiva, recordando antes que

$$\frac{dr^2}{ds} = -\frac{2}{w^2}\frac{dT'}{ds} = -\frac{2}{w}\frac{\pm\sqrt{R}}{T'} \qquad (39)$$

1.º Si T'_1 es negativo, T_a y T_b son ambos negativos. Partiendo de A y siguiendo la curva en la dirección del movimiento, ds es positivo y dr^2 también porque r_1 es un mínimo. Luego de las últimas igualdades escritas se deduce que dT' es negativo y que el radical debe tomarse con el signo $+$. Si dT' es negativo, y T' es también negativo, el valor absoluto de T' irá creciendo con r. En estas condiciones, para que R sea positivo, es necesario, ó bien que T'_1 sea la mayor en valor absoluto de todas las raíces, ó bien que T' varíe entre T'_1 y la raíz T_a ó T_b inmediatamente inferior, y en valor absoluto superior. El primer caso no tiene realidad en el problema que estamos considerando, por ser los valores de r necesariamente finitos. De las dos raíces T_a y T_b la primera es siempre menor que T'_1 en valor absoluto, en efecto, si admitimos lo contrario, distinguiendo por una raya los valores absolutos de las raíces de R,

$$-\frac{3}{4} w^2 r_1^2 + \sqrt{\frac{9}{16} w^4 r_1^4 - \overline{T}'_1 \frac{w^2 r_1^2}{2}} > \overline{T}'_1$$

tendremos

$$o > \overline{T}'^2 + \overline{T}' \frac{w^2 r_1^2}{2} + \frac{3}{2} w^3 r_1^2$$

resultado absurdo. Luego T' sólo puede variar entre T'_1 y T_b. Pero T_b, si bien es mayor en valor absoluto que T'_1, también es mayor que $w^2 r_1^2$, á menos que $T'_1 = w^2 r^2$ en cuyo caso $T_b = T'_1$. Pero entonces no hay variación posible en

el valor de T', y $r = r_1$ constantemente. Prescindiendo de este caso, de la discusión anterior resulta que son inadmisibles valores negativos de T'_1

2.° Si T'_1 es nulo, la raíz T_a se anula también, la raíz T_b se hace igual á $-\frac{3}{2} w^2 r_1^2$ y el radical, para valores de T' próximos al valor cero es necesariamente imaginario. Luego T'_1 no puede ser cero.

3.° Si T'_1 es positivo, para que $-\frac{dT'}{ds}$ sea positivo es necesario que dT' sea positivo, luego á partir de A, T' disminuye. El radical debe tomarse con el signo menos. En estas condiciones, para que R sea positivo, es necesario que T'_1 sea en valor absoluto la menor de todas las raíces ó bien, dado que T_b es negativo y menor que T_a, que T' varíe entre T'_1 y T_a. Lo primero es inadmisible por no admitir el problema valores indefinidamente grandes de r. Lo segundo es aceptable si $T_a < T'_1$, lo cual no solamente tiene lugar, sino que se verifica también que $T_a < \frac{T'_1}{2}$, en efecto, de

$$-\frac{3}{4} w^2 r_1^2 + \sqrt{\frac{9}{16} w^4 r_1^4 + \frac{w^2 r_1^2}{2} T'_1} < \frac{T'_1}{2}$$

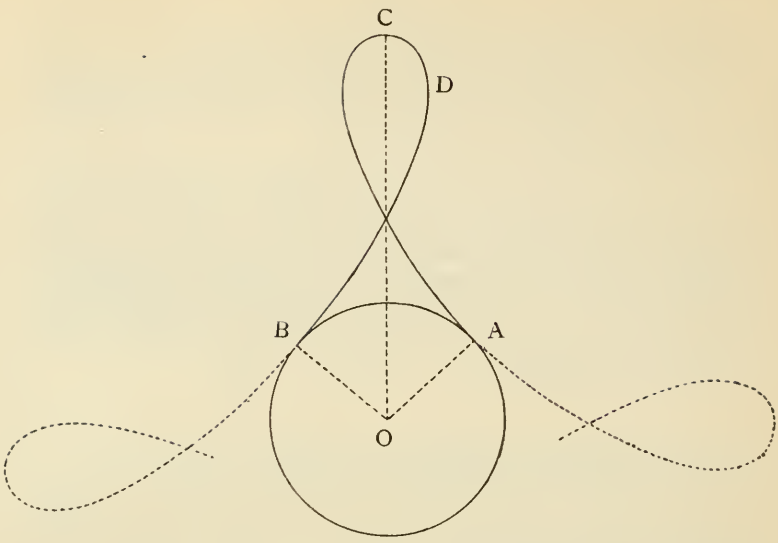
se deduce la desigualdad evidente

$$o < \frac{T'_1}{2} + \frac{T'_1}{4} w^2 r_1^2$$

De la discusión anterior se deduce que T'_1 debe necesariamente ser mayor que cero, y que á partir de ese valor, T' disminuye hasta alcanzar el valor T_a. En el punto correspondiente $\frac{dr^2}{ds} = o$, y llamando r_2 á su distancia al origen, el máximo de r será

$$r_2^2 = r_1^2 + \frac{2(T'_1 - T_a)}{w^2}$$

A partir del valor T_a, T' retrocede á los valores anteriores variando de T_a á T'_1 y consiguientemente r de r_2 á r_1 otra vez donde es tangente al árbol, empalmando allí con un arco de circunferencia de radio r_1 que completa la curva realizada por el hilo.



(Fig. 12)

La distancia del origen á la tangente, dada por

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = r_1 \frac{T'_1 - 2T'}{T'}$$

empieza siendo negativa, se anula para

$$T' = \frac{T'_1}{2}$$

valor admisible según lo demostrado antes, y se hace después positiva alcanzando el valor r_2 para $T' = T_a$. Es decir, la curva pasa de convexa respecto del origen á cóncava en el punto para el que $T' = \frac{T'_1}{2}$, situado á la distancia r dada por

$$r^2 = r_1^2 + \frac{T'_1}{a^2}$$

En consecuencia, la crrva que estudiamos es simétrica respecto de la recta *O C*, y presenta un punto doble.

Para calcular el radio de curvatura se puede expresar que las fuerzas que obran según la normal principal se equilibran. Con lo cual, se tendrá

$$w^2 r^2 \frac{d\varphi}{ds} + 2 w^2 r_1 = \frac{T'}{\rho}$$

ó sea

$$w^2 r_1 \left[\frac{T'_1 - 2 T'}{T'} + 2 \right] = \frac{T'}{\rho}$$

de donde

$$\frac{1}{\rho} = \frac{T'_1}{w^2 r_1 T'_1}$$

Los radios de curvatura en los puntos *A*, *C* y *D* serán respectivamente

$$\rho_1 = \frac{T'_1}{w^2 r_1}$$

$$\rho_2 = \frac{w^2 r_1 T'_1}{T_a^2}$$

$$\rho' = \frac{\rho_1}{4}$$

Como T' varía entre valores finitos, ρ no puede crecer indefinidamente, luego la curva no presenta punto de inflexión. En el punto de acuerdo de la curva con el arco de círculo la curvatura cambia de signo pero no es un punto de inflexión de la curva que estudiamos, la cual, completa, se compone de varias ramas congruentes. La discontinuidad en el valor de $\frac{T'}{\rho}$ para el punto de acuerdo con el arco de círculo, queda compensada por la introducción de la reacción del árbol, la cual se halla dirigida por cada elemento *ds*, según la normal externa y vale

$$N ds = \left(\frac{T'_1}{r_1} + w^2 r_1 \right) ds$$

La reacción total del árbol está dirigida según $O\ C$ y vale

$$2\ sen\ \varphi_1 \left[w^2\ r_1 + 2\ T'_1 \right]$$

habiendo llamado φ_1 al ángulo φ para el punto A. Este ángulo viene dado por

$$\varphi_1 = - \int_{T_a}^{T_1} w\ r_1\ \frac{T'_1 - 2\ T'}{r_1^2\ w^2 + 2\ (T'_1 - T')}\ \frac{d\ T'}{\sqrt{R}}$$

$$- w\ r_1 \int_{Ta}^{T_1} \frac{d\ T'}{\sqrt{R}} + \frac{w\ r_1}{2} \int_{Ta}^{T_1} \frac{T'_1 + r_1^2\ w^2}{T'_1 + \frac{r_1^2\ w^2}{2} - T'}\ \frac{d\ T'}{\sqrt{R}}$$

El ángulo que la tangente forma con OC al pasar por O, es: . .

$$\varphi' = w\ r_1 \int_{T_a}^{\frac{T_1}{2}} \frac{d\ T'}{\sqrt{R'}} - \frac{w\ r_1}{2} \int_{T_a}^{\frac{T_1}{2}} \frac{T'_1 + r_1\ w^2}{T'_1 + \frac{r_1^2\ w^2}{2} - T'}\ \frac{d\ T'}{\sqrt{R}}$$

El valor de T'_1 del que dependen las demás cantidades se puede obtener expresando que el hilo sin fin tiene una longitud dada de antemano. La longitud de la curva entre A y C, es

$$S_1 = \frac{1}{w} \int_{T_a}^{T_1} \frac{T'\ d\ T'}{\sqrt{R}}$$

Luego, si la longitud total es L,

$$L = 2\ s_1 + 2 \left[\pi - \varphi_1 \right] r_1$$

ó sea

$$\frac{L - 2\pi r_1}{2} = \frac{1}{w}\int_{T_a}^{T_1} \frac{T'\,d\,T'}{\sqrt{R}} + w r_1 \int_{T_a}^{T_1} \frac{d\,T'}{\sqrt{R}} - w r_1 \int_{T_a}^{T_1} \frac{T' + r_1^2 w^2}{T'_1 + \frac{r_1^2 w^2}{2} - T'_1} \frac{d\,T'}{\sqrt{R}}$$

Determinado el valor de T'_1 se puede calcular T_a y por lo tanto, tomando el origen de arcos en C y de ángulos en OC,

$$s = \frac{1}{w}\int_{T_a}^{T'} \frac{T'\,d\,T'}{\sqrt{R}}$$

$$\varphi = w r_1 \int_{T_a}^{T'} \frac{d\,T'}{\sqrt{R}} - w r_1 \int_{T_a}^{T'} \frac{T'_1 + r_1^2 w^2}{T'_1 + \frac{r_1^2 w^2}{2} - T'} \frac{d\,T'}{\sqrt{R}}$$

mediante estas fórmulas, y con los valores de r^2, $r^3 \frac{d\varphi}{ds}$ y $\overline{\rho}$ se tienen sobrados elementos para construir la curva. En la figura, $r_1 = 2$, $w = 2$, $T'_1 = 1000$.

Introduciendo las siguientes notaciones

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{-\infty}^{T'} \frac{d\,T'}{\sqrt{R}}$$

$$u_a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{-\infty}^{T_a} \frac{d\,T'}{\sqrt{R}}$$

se pueden expresar los valores de s y φ en función de u mediante las funciones σ, ζ y p de Weierstrass construídas con los semi-períodos.

$$w = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_{T_a}^{T_1} \frac{d\,T'}{\sqrt{R}}$$

$$w' = \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \int_{-\infty}^{T'_1 - 3u^2 r} \frac{d\,T'}{\sqrt{R}}$$

del modo siguiente: (C y OC son los orígenes respectivos).

$$w\,s = \sqrt[3]{2}\left[u - u_a\right]\left[T'_1 - \frac{3}{2}\,w^3\,r_1^2\right] + \sqrt[3]{4}\left[\zeta(u) - \zeta(u_a)\right]$$

$$\frac{\varphi}{w\,r_1} = \sqrt[3]{2}\left[u - u_a\right] + \frac{T'_1 + r_1^2\,w^2}{\sqrt[3]{2}\,p'(a)}\left[l.\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u_a+a)}{\sigma(u+a)\,\sigma(u_a-a)} + 2\,\zeta(a)\,(u-u_a)\right]$$

siendo

$$p(a) = \sqrt[3]{4}\,w^2\,r_1^2$$

Para el cálculo numérico es, con todo, casi indispensable recurrir á las funciones de Jacobi, no tanto por la dificultad en el cálculo directo de las p, ζ y σ sino en especial por el cálculo inverso de hallar el argumento conocida la función.

En las fórmulas anteriores u varía entre u_a y $u_a + w$ para los distintos puntos de la rama CA.

IX.—Movimiento estacionario respecto de un sistema de ejes que se trasladan.

Si el sistema móvil de ejes de referencia se halla animado de un movimiento de traslación, la aceleración de Coriolis es nula, y las aceleraciones a_x, a_y y a_z se reducen á las componentes de la aceleración del origen.

Supondremos en este párrafo que es tal el movimiento de los ejes, que el origen se mueve en línea recta con velocidad contante u, y dispondremos el eje de las equis según esta trayectoria. Admitiremos, además que no existe fuerza ninguna ni movimiento inicial que tenga componente según el eje de las z y que la forma inicial del hilo es plana y se halla en el plano de las xy. Un caso particular que responde á estas condiciones y que nos proponemos tratar en lo que

sigue es el del cable submarino, es decir, averiguar la forma de la curva que realiza el cable submarino al ser tendido en el fondo del mar por un buque que se supone recorrer una trayectoría rectilínea en la superficie libre del mar, de nivel constante h, referida á ejes invariablemente unidos al buque.

En la clase movimiento que estamos considerando, las ecuaciones (17), suponiendo para simplificar $\rho\,\sigma = 1$, se convierten en las siguientes:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \bar{\sigma}} + \mathfrak{F} \tag{40}$$

$$\frac{v^2 - T}{\bar{\rho}} = \mathfrak{N} \tag{41}$$

Eliminando T, resulta

$$\frac{dv}{dt} = \mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}}\left(\bar{\rho}\,\mathfrak{N}\right) \tag{42}$$

en que el primer miembro es función exclusivamente del tiempo.

En el caso particular del cable, el elemento ds se hallará sujeto de una parte á la gravedad que lo solicita hacia abajo y el empuje del líquido que tiende á elevarlo; de otra parte á la resistencia del medio que supondremos proporcional á la velocidad, pero admitiendo, por lo menos de momento, que la constante de proporcionalidad k_1 en la componente tangencial, no es la misma que la constante k_2 en la componente normal. Llamaremos g_1 á la aceleración de la gravedad disminuída del empuje del agua.

La velocidad total de un elemento ds se compone de la velocidad v según la tangente y de la velocidad u según el eje de las equis. Por consiguiente, la componente de la velocidad, según la tangente, será

$$-v + u\cos\alpha$$

siendo α el ángulo que la tangente á la curva forma con el eje x. Sobre la normal externa la componente de la velocidad será

$$u\,sen\,\alpha$$

Luego las fuerzas de resistencia del medio tendrán por proyecciones

$k_1 (v - u \cos \alpha)$

$k_2 u \operatorname{sen} \alpha$

respectivamente.

En consecuencia, por (42), suponiendo además el origen de arcos en O, y positiva la dirección de la flecha (fig. 13).

$$- \frac{dv}{dt} = - g' \operatorname{sen} \alpha + k_1 (v - u \cos \alpha) + \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} \left[- g' \cos \alpha + k_2 u \operatorname{sen} \alpha \right] \bar{\rho}$$

la cual se puede escribir

$$- \frac{dv}{dt} - k_1 v = - g' \operatorname{sen} \alpha - k_1 u \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} \left[- g' \cos \alpha + k_2 u \operatorname{sen} \alpha \right] \bar{\rho}$$

Ahora bien, el segundo miembro es función sólo de $\bar{\sigma}$, el primero sólo de t. Por consiguiente, designando por $k_1 v_0$ una constante, se debe tener

$$\frac{dv}{dt} + k_1 v = k_1 v_0$$

ó sea

$$v - v_0 = k_3 e^{- k_1 (v - v_0)}$$

En el caso del cable tal como lo consideramos, la velocidad v es constante. Este valor satisface á la ecuación anterior y constituye la solución de la misma, correspondiente al caso $k_3 = o$.

El valor de v_0, si el cable no es arrastrado en el fondo del mar, es evidentemente igual á u.

Suponiendo, pues, v constante, se tiene:

$$- g' \operatorname{sen} \alpha - k_1 u \cos \alpha + k_1 v + \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} \left(- g' \cos \alpha + k_2 u \operatorname{sen} \alpha \right) \bar{\rho} = o \qquad (43)$$

Si en la ecuación (41) suponemos $\bar{\rho} = \infty$ que corresponde al caso en que la curva de equilibrio es una recta, se tiene

$$tg\ \alpha = \frac{g'}{k_2 u}$$

Llevado este valor á la (40),

$$\frac{dT}{d\bar{\sigma}} - g'\ sen\ \alpha + k_1 \left[v - u\ cos\ \alpha \right] = o$$

Integrando,

$$T = g'\ y + k_1\ u\ x - k_1\ v_o\ \bar{\sigma} = y \left[g' + \frac{k_1\ (u\ cos\ \alpha - v)}{sen\ \alpha} \right]$$

sin constante arbitraria, porque en el origen O, supuesto ser el punto más bajo de la recta considerada, la tensión debe necesariamente ser nula, sea porque cuelgue libremente en el agua, sea por que en caso contrario, en el punto de unión de la horizontal que realiza el cable ya tendido con la recta inclinada de un ángulo α con el horizonte, la tensión debe necesariamente ser cero, ya que de otro modo, constituyendo un punto anguloso, el elemento ds que se halla en el mismo estaría sujeto á una fuerza finita.

La fórmula anterior relaciona la tensión á bordo con la velocidad de salida del cable cuando éste afecta la forma rectilínea, tensión que acaba de determinar la longitud de cable salida del buque. En el caso en que $v = o$, la tensión es

$$T = y \left[g' + k_1\ u\ cot\ \alpha \right] =$$

$$y\ g' \left[1 + \frac{k_1}{k_2} \right]$$

Si $v = u$, lo cual corresponde al caso ya considerado,

$$T = y \left[g' - k_1\ u\ tg\ \frac{1}{2}\ \alpha \right]$$

Las ecuaciones (40 y (41) en el caso en que v es constante, son, como ya se manifestó en el párrafo anterior, las de equilibrio de un hilo en que las fuerzas

externas por unidad de masa tienen por componentes T y N, pero con la diferencia de que la tensión en el equilibrio es

$$T' = T - v^2$$

Para mayor sencillez en los cálculos que siguen, supondremos $k_1 = k_2 = k$ Además, descartaremos el caso en que el cable pende libremente para atenernos á aquel en que $u = v$.

Aplicando al problema que nos ocupa las ecuaciones (1) y teniendo presente lo que acabamos de decir, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}}\left(T' \cos \alpha\right) - k\, v + k\, v \cos \alpha &= o \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}}\left(T' \operatorname{sen} \alpha\right) + k\, v \operatorname{sen} \alpha - g' &= o \end{aligned}\right\} 43$$

Multiplicando por $d\bar{\sigma}$ é integrando,

$$T' \cos \alpha + k\, v\,(x - \bar{\sigma}) = T'_o$$

$$T' \operatorname{sen} \alpha + k\, v\, y - g'\,\bar{\sigma} = o$$

La constante arbitraria T'_o representa el valor de T' en el origen para el que suponemos $x = y = s = o$.

Si $T'_o \pm o$, necesariamente $\alpha = o$. Este es el caso que hemos supuesto al integrar. El caso en que $T'_o = o$ en el cual α puede ser distinto de cero para el origen, será examinado más tarde.

Eliminando T' entre las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$tg\ \alpha = \frac{-\,k\, v\, y + g'\,\bar{\sigma}}{-\,k\, v\,(x - \bar{\sigma}) + T'_o}$$

Así pues, la ecuación diferencial de la curva que analizamos será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'\,\bar{\sigma} - k\, v\, y}{T'_o - k\, v\,(x - \bar{\sigma})}$$

De esta ecuación diferencial se deducen importantes consecuencias. Poniendo $x = r \cos \alpha$, $y = r \operatorname{sen} \alpha$,

$$r \left[- k v \frac{\bar{\sigma}}{r} tg \alpha + g' \frac{\bar{\sigma}}{r} \right) = T'_o \, tg \alpha \qquad (44)$$

Al crecer $\bar{\sigma}$ indefinidamente, la relación $\frac{\bar{\sigma}}{r}$ tiende á la unidad y la curva á la asintota, cuyo ángulo α con el eje de las x resulta de anular el coeficiente de r, á saber:

$$tg \alpha' = \frac{g'}{k v}$$

Para puntos de la curva muy alejados del origen, se podrá, pues, poner

$$r \left(tg \alpha' - tg \alpha \right) = \frac{T'_o}{k v} tg \alpha$$

En consecuencia, la distancia del origen á la asintota será

$$lim \, r (\alpha - \alpha') = \frac{T'_o}{k v} \operatorname{sen} \alpha' \cos \alpha' = \frac{T_o g'}{k^2 v^2 + g'^2}$$

La integración de la ecuación diferencial puede efectuarse como sigue: Por (44)

$$s = \frac{T'_o}{k v} \frac{tg \alpha}{tg \alpha' - tg \alpha}$$

luego

$$\frac{d s}{d \alpha} = \bar{\rho} = \frac{T'_o}{k v} \frac{tg \alpha}{(tg \alpha' - tg \alpha)^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

De esta ecuación se deduce el valor de $\bar{\rho}$ para $\alpha = o$, á saber:

$$\bar{\rho}_o = \frac{T'_o}{g}$$

Por otra parte, multiplicando la ecuación (43) por ds é integrando, se halla otra expresión del valor de $\bar{\rho}$:

$$\frac{}{\rho} = \frac{g' y - k v (\bar{\sigma} - x) - T'_o}{k v \operatorname{sen} \alpha - g' \cos \alpha}$$

Por consiguiente, igualando ambos valores de $\bar{\rho}$ se tiene:

$$\frac{}{\rho_o} \frac{tg^2 \alpha'}{(tg \alpha' - tg \alpha)^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{- \bar{\rho}_o + y - (\bar{\sigma} - x) \cot \alpha'}{- \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cot \alpha'}$$

Escribiendo $tg \alpha = p$, la expresión anterior es equivalente á esta:

$$y + x \cot \alpha' = \frac{\rho_o tg \alpha' \left[\sqrt{1 + p^2} - 1\right]}{p - tg \alpha'} \qquad (45)$$

Derivando respecto á x para hallar x en función de p, é integrando

$$\frac{x}{\rho_o} \cot \alpha' = tg \alpha' \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2} (p - tg \alpha')^2} + \int \frac{dp}{(p - tg \alpha')^2 (p + \cot \alpha')}$$

La primera integral se reduce inmediatamente á una función racional con el cambio de variable

$$tg \frac{1}{2} u = \sqrt{1 + p^2} - 1 \quad ;$$

su valor es

$$log\ nep \frac{1 - (\cos \alpha' - \operatorname{sen} \alpha') - \operatorname{sen} \alpha' \sqrt{1 + p^2}}{1 + (\cos \alpha' - \operatorname{sen} \alpha') + \operatorname{sen} \alpha' \sqrt{1 + p^2}}$$

La segunda integral poniendo

$$A = \frac{tg^4 \alpha'}{2 tg^2 \alpha' - 1} \qquad , \quad c = - tg^3 \alpha'$$

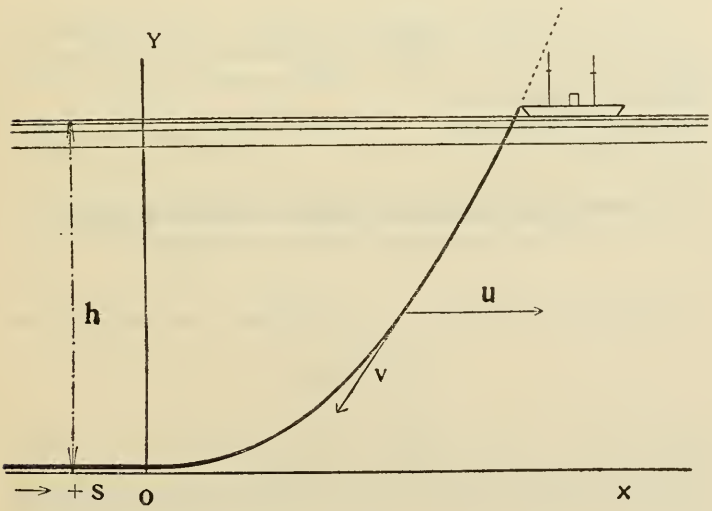
tiene por valor

$$A \log nep \frac{p + cot\, \alpha'}{p - tg\, \alpha'} - \frac{c + tg\, \alpha'}{p - tg\, \alpha'}$$

Obtenido x en función de p, si se lleva á (45), se tiene y en función de p, y con estas dos ecuaciones se halla definida la curva por completo. En las últimas integraciones interviene una nueva constante que se determinará por la condición de anularse x y p simultáneamente.

La forma de la curva depende de lo que podríamos llamar parámetro T'_o. Para determinar el valor del parámetro T'_o que corresponde á cada caso, puede procederse como sigue. Obtendas las dos ecuaciones de la curva en que x é y se presentan como funciones de p, mediante la ecuación que relaciona s y p, podemos definir la curva por las dos ecuaciones

$$x = f_1(\bar{\sigma})$$
$$y = f_2(\bar{\sigma})$$



(Fig. 13)

Sea h el nivel del mar sobre el fondo, X la distancia rectilínea recorrida por el buque, L la longitud total del cable, m la longitud del mismo, dispuesta en el fondo.

Se tendrá

$$X = m + x - a$$
$$L = m + \overline{\sigma}$$

habiendo llamado a al exceso de $m + x$ sobre X, debido al perfil en la costa, supuesto conocido. Por consiguiente

$$h = f_1 (L - m)$$
$$X - m + a = f_2 (L - m)$$

Estas dos ecuaciones pueden servir para determinar m y T'_o

En el caso de suponer despreciables las resistencias debidas al agua, la forma de la curva es una catenaria. El valor de la constante T'_o proporcional al parámetro de la misma vendría definido por las funciones f_1 y f_2 determinadas por las fórmulas de las páginas 66 y 68.

En el caso en que para el origen $T = o$ ó sea $T' = c^2$, sea β el ángulo de la tangente con el eje de las x. Al integrar las ecuaciones (43) las constantes arbitrarias serán $c^2 \cos \beta$ y $c^2 \operatorname{sen} \beta$, respectivamente. En cuanto al resto del cálculo, es enteramente análogo.

X.—Movimiento estacionario referido á ejes fijos. Aplicación á las transmisiones de fuerza por cables.

Las ecuaciones del movimiento en la forma intrínseca, serán, suponiendo $\rho \sigma = 1$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial T}{\partial s} + \mathfrak{T}$$
$$\frac{v^2 - T}{\rho} = \mathfrak{N}$$

La tercera expresa que la fuerza exterior no tiene componente según la binormal.

Eliminando T entre las dos ecuaciones últimamente escritas, se halla

$$\frac{dv}{dt} = \mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial s}(\bar{\rho}\,\mathfrak{N}) \qquad (46)$$

De esta ecuación se deduce que si la fuerza exterior es función solamente de t ó de v, la única trayectoria posible es una espiral logarítmica

$$\bar{\rho} = k_1 s + k_2$$

que puede convertirse en un círculo. El movimiento viene difinido por

$$\frac{dv}{dt} = \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{N}$$

El razonamiento que permite establecer esta propiedad es enteramente análogo al indicado en el capítulo preanterior. Si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{N}$ son funciones exclusivamente de t, la ecuación (46) puesta en la forma

$$\frac{\frac{dv}{dt} - \mathfrak{F}}{\mathfrak{N}} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial s}$$

tiene el primer miembro dependiente sólo de t, el segundo depende sólo de $\bar{\sigma}$, luego es necesario que ambos sean iguales á una constante k_1 que puede ser cero.

Cuando la fuerza exterior, es decir $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{N}$ dependa sólo de $\bar{\sigma}$, el mismo razonamiento puede aplicarse á la ecuación 46 en la forma en que está. Por consiguiente, en esta hipótesis,

$$\frac{dv}{dt} = k_1$$

$$\mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}}\left(\bar{\rho}\,\mathfrak{N}\right) = k_1$$

siendo k_1 una constante que puede ser cero. La primera de estas dos condiciones nos dice que el movimiento ó será uniformemente acelerado ó uniforme. La segunda indica las curvas según las cuales será posible el movimiento con adecuadas condiciones iniciales y límites.

En este capítulo vamos á ocuparnos en un caso particular de esta última hipótesis, aquel en que la única fuerza exterior es la gravedad. En uno y otro caso supondremos curvas planas.

Si en el plano de la curva el eje x es horizontal y el y vertical hacia el zénit, llamando g á la aceleración de la gravedad y α al ángulo de la tangente con el eje de las x

$$\mathfrak{T} = - g \operatorname{sen} \alpha$$

$$\mathfrak{N} = g \cos \alpha$$

Pondremos para simplificar $k_1 = \beta g$, siendo β constante. Con lo cual la ecuación diferencial de las curvas según las que es posible el movimiento estacionario, será

$$- \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{\rho} \cos \alpha) = \beta$$

ó sea

$$\frac{d \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \, d \alpha}{\cos \alpha} + \beta \frac{d \alpha}{\cos \alpha}$$

Al integrar esta ecuación hay que distinguir dos casos: el correspondiente á valores positivos de $\cos \alpha$ y el correspondiente á valores negativos. En la integral efectuada en la primera hipótesis sólo podrá tener $\cos \alpha$ valores positivos, es decir, α valores comprendidos entre $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$ pasando por o. En el segundo, sólo podrán darse á α valores comprendidos entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3}{2}\pi$ pasando por π.

Si $\cos \alpha > o$, siendo h una constante arbitraria,

$$\log \text{nep} \frac{\bar{\rho}}{h} = - 2 \log \text{nep} \cos \alpha - \beta \log \text{nep} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(90 - \alpha \right)$$

Si $\cos \alpha < o$

$$\log \text{nep} \frac{\bar{\rho}}{h} = - 2 \log \text{nep} \cos (\alpha + 180) + \beta \log \text{nep} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(- \alpha - 90 \right)$$

ó bien

$$\bar{\rho} = \frac{h}{\cos^2 \alpha}\left[\frac{1}{tg\,\frac{1}{2}(90 - \alpha)}\right]^{\beta} = \frac{h}{\cos^2 \alpha}\left[\frac{1 + tg\,\frac{1}{2}\alpha}{1 - tg\,\frac{1}{2}\alpha}\right]^{\beta}$$

$$= \frac{h}{\cos^2 \alpha}\left[\frac{1 + sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}\right]^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\bar{\rho} = \frac{h}{\cos^2 \alpha} tg^{\beta}\,\frac{1}{2}(-\alpha - 90) = \frac{h}{\cos^2 \alpha}\left[\frac{1 + sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}\right]^{\frac{\beta}{2}}$$

Introduciremos ahora la cantidad u definida por

$$u^2 = \frac{1 + sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}$$

y supondremos que de la raíz cuadrada de u^2 tomamos siempre el valor positivo.

En esta hipótesis, si $\cos \alpha > 0$

$$sen\,\alpha = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \qquad , \qquad \cos \alpha = \frac{2u}{u^2 + 1}$$

Por consiguiente

$$d\alpha = \frac{2\,du}{u^2 + 1}$$

y, sucesivamente,

$$ds = \bar{\rho}\,d\alpha = \frac{h}{2u^2}(u^2 + 1)\,u^{\beta}\,du = \frac{h}{2}\left(u^{\beta} + u^{\beta-2}\right)du$$

$$dx = ds\cos\alpha = h\,u^{\beta-1}\,du$$

$$dy = ds\,sen\,\alpha = \frac{h}{2}\left(u^{\beta} - u^{\beta-2}\right)du$$

Si $cos\ \alpha < o$, conservando á u la misma significación,

$$sen\ \alpha = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \quad , \quad cos\ \alpha = \frac{-2\,du}{u^2 + 1} \qquad d\alpha = \frac{-2\,du}{u^2 + 1} \tag{47}$$

$$ds = -\frac{h}{2}\left(u^{\beta} + u^{\beta-2}\right)du, \quad dx = h\,u^{\beta-1}\,du\,, \quad dy = -\frac{h}{2}\left(u^{\beta} - u^{\beta-2}\right)du$$

Para las integraciones sucesivas, debemos distinguir los tres casos excepcionales en que $\beta = o$, $\beta = 1$ y $\beta = -1$.

Primer caso. $\beta = o$ La Ecuación.

$$\bar{\rho}\ cos^2\alpha = h$$

nos dice sin necesidad de más que la curva de movimiento estacionario es la categoría de parámetro h. Por consiguiente, si el movimiento del hilo pesado tiene lugar con velocidad constante en la trayectoría, la forma de la curva realizada de un modo estacionario, es una catenaria. La tensión es igual á la de la catenaria de equilibrio más la cantidad v^2.

Segundo caso $\beta = 1$. Tomando ya, en todo lo sucesivo el origen en el punto en que la tangente á la curva es horizontal para el que $u = 1$

$$s = \frac{h}{2}\left[\frac{u^2 - 1}{2} + log\ nep\ u\right]$$

$$x = h\,(u - 1)$$

$$y = \frac{h}{2}\left[\frac{u^2 - 1}{2} - log\ nep\ u\right]$$

Sólo hay que considerar el caso en que $cos\ \alpha > o$ como resulta de la dirección que sigue.

Tercer caso $\beta = -1$

$$s = \frac{h}{2}\left[log\ nep\ u - \frac{2}{u^2} + 2\right]$$

$$x = h\left[1 - \frac{1}{u}\right]$$

$$y = \frac{h}{2}\left[log\ nep\ u - \frac{2}{u} + 2\right]$$

Puede hacerse la misma observación que en el caso anterior.
Excluyendo los tres casos que anteceden, las integrales son ($cos\ \alpha > o$)

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h}{2}\left[\frac{u^{\beta+1}-1}{\beta+1}+\frac{u^{\beta-1}-1}{\beta-1}\right] \\ x &= h\,\frac{u^{\beta}+1}{\beta} \\ y &= \frac{h}{2}\left[\frac{u^{\beta+1}-1}{\beta+1}-\frac{u^{\beta-1}-1}{\beta-1}\right] \end{aligned}\right\} 48$$

El valor de la tensión viene dado por

$$T = v^2 + \bar{\rho}\, g\, cos\ \alpha = v^2 + g\,\frac{h}{2}\left(u^{\beta+1}+u^{\beta-1}\right)$$

Para discutir la forma de la curva, supondremos $\beta > o$. Los casos en que $\beta < o$ se reducen á los casos en que $\beta > o$ poniendo

$$u = \frac{1}{u'}$$

ó sea cambiando α en $\pi - \alpha$, resultando figuras simétricas respecto del eje de las y, de las que vamos á considerar á continuación.

Dentro del caso $\beta > o$ distinguiremos que β sea igual ó menor que uno ó que sea mayor.

Primer caso $\beta \leq 1$. Al variar α de $\frac{\pi}{2}$ á o pasa u de ∞ á 1, los valores de x, y, y s pasan de ∞ á o. El radio de curvatura de ∞ á h y la tensión de ∞ á v^2+gh. Al variar α de o á $-\frac{\pi}{2}$, si pasa de 1 á o, x varía entre o y $\frac{h}{\beta}$, y entre o y ∞; s entre o y ∞. Por consiguiente, la curva tiene una forma parabólica con una asíntota vertical en la rama en que el movimiento es descendente, á la distancia $-\frac{h}{\beta}$ del punto más bajo.

Segundo caso $\beta > 1$. Entre los valores de α comprendidos entre $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$

el valor de x varía como en el caso anterior. Pero si bien la rama ascendente se extiende para valores próximos á $\frac{\pi}{2}$ al infinito, la rama descendente es finita. Para el valor $-\frac{\pi}{2}$, en efecto,

$$y = \frac{h}{\beta^2 - 1} \qquad s = \frac{h\beta}{\beta^2 - 1}$$

A partir del punto que corresponde al valor $-\frac{\pi}{2}$ de α, hay que dar á α valores menores, pero entonces, siendo $\cos \alpha$ negativo, no pueden utilizarse las fórmulas (48) sino las que resultan de integrar las 47, en las que, como u se supone siempre positivo en ellas, se establecerá al efectuar la integración que, para $u = o$, x, y, y s tienen los valores anteriormente calculados, con lo cual, se tendrá

$$x = \frac{h'}{\beta}\left(u^{\beta} - 1\right)$$

$$y = \frac{h'}{2}\left[\frac{u^{\beta-1} + 1}{\beta - 1} - \frac{u^{\beta+1} + 1}{\beta + 1}\right]$$

$$s = \frac{h'}{2}\left[\frac{u^{\beta+1} + 1}{\beta + 1} + \frac{u^{\beta-1} + 1}{\beta + 1}\right]$$

El parámetro h' puede ser distinto en esta segunda parte de las mismas. Si es igual á h, la nueva rama de la curva es simétrica de la anterior respecto de una paralela al eje de las x á una distancia

$$\frac{h}{\beta^2 - 1}$$

de la misma. La curva total presenta un lazo, es decir, dos ramas de la curva se cortan en un punto. Si la curva es simétrica, el valor de u para dicho punto es

$$u = \sqrt{\frac{\beta + 1}{\beta - 1}}$$

Fijado el valor de β las curvas que corresponden á distintos valores de h son semejantes.

La constante h se determina en cada caso por las condiciones del problema.

Pueden suponerse realizadas en parte las curvas anteriores, disponiendo una cuerda sin fin sobre una polea animada de un movimiento acelerado ó retardado de rotación. Las condiciones para la determinación de h se reducen á expresar la tangencia de la curva con el círculo de garganta de la polea y á formular que la longitud total de la cuerda sin fin es un dato. Pueden también suponerse realizadas por una disposición análoga á las de las transmisiones electrodinámicas, una cuerda sin fin desliza entre dos poleas, formándose entonces dos de las curvas analizadas.

Supongamos que la polea de que cuelga una cuerda sin fin gira con velocidad angular constante; la cuerda se dispondrá en forma de una catenaria cuyo parámetro y cuya posición se pueden determinar como sigue. Sea γ el ángulo que el radio vector que va del centro del círculo de garganta al punto de contacto de la catenaria con el citado círculo forma con la vertical descendente. Sea l la longitud total dada. En virtud de las fórmulas de las páginas 66 y 71, así como de la fig. (3) se podrá escribir

$$\frac{l}{2} = m\,tg\,\gamma + a\,(\pi - \gamma)$$

$$m = \frac{a\,sen\,\gamma}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma}$$

De modo que el valor de γ viene definido por la ecuación

$$\frac{l}{2a} = \frac{sen\,\gamma\,tg\,\gamma}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma} + \pi - \gamma$$

y el valor del parámetro m por la anterior. Conociendo estas dos cantidades, se conoce en forma y posición la catenaria.

En los proyectos de transmisiones teledinámicas se ofrece el siguiente problema:

Calcular la longitud y diámetro de un cable sin fin entre dos poleas, conocida la velocidad de giro de éstas, la potencia en caballos que se quiere trasmitir y la substancia de que está constituído el cable, definida, verbigracia, por la tensión de ruptura por unidad de superficie y el módulo de elasticidad E.

En lo que sigue vamos á formular las ecuaciones que permiten resolver exactamente el problema en el caso, prácticamente el más importante, en que las dos poleas motriz y resistente sean iguales y se hallen á igual altura. A continuación indicaremos el modo aproximado con que puede procederse en el caso general.

Se observará que si N es la potencia que se trata de transmitir, esa potencia es igual á la diferencia de tensiones en los puntos en que las catenarias que el cable realiza son tangentes á la polea motriz, multiplicada aquella diferencia por la velocidad v del cable, pues la diferencia de tensiones mantiene el equilibrio con el par motor en la garganta de la polea, mediante las fuerzas de rozamiento.

Sean $2\,d$ la distancia entre los centros de las poleas, a su radio, γ_1 y γ_2 los ángulos tomados positivamente y menores que $\frac{\pi}{2}$, que con la vertical ascendente ó descendente forman los radios vectores de las poleas que van á los puntos u que son tangentes á las catenarias realizadas por el cable. Sea además ρ la densidad, σ la sección. Recordando que la tensión en el vértice en una catenaria es igual al parámetro m multiplicado por $\rho\,\sigma\,g$, y que la proyección horizontal de la tensión es constante, se tendrá

$$\frac{N}{v} = \rho\,\sigma\,g\left[\frac{m_1}{\cos\gamma_1} - \frac{m_2}{\cos\gamma_2}\right]$$

Mas, según lo establecido antes

$$m_1 = \frac{d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_1}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma_1}$$

$$m_2 = \frac{d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_2}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma_2}$$

Por consiguiente, se tiene la siguiente relación entre γ_1 y γ_2

$$\frac{N}{v\,\rho\,\sigma\,g} = \frac{1}{\cos\gamma_1}\,\frac{d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_1}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma_1} + \frac{1}{\cos\gamma_2}\,\frac{d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_2}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma_2} \qquad (49)$$

Ahora bien, la tensión máxima que soporte el cable, será:

$$\rho\,\sigma\,v^2 + \frac{m_1\,\rho\,\sigma\,g}{\cos\gamma_1} = \rho\,\sigma\,v^2 + \frac{\rho\,\sigma\,g}{\cos\gamma_1}\,\frac{d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_1}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma_1}$$

Prácticamente debe agregarse un término procedente de la mayor tensión que sufren las fibras del cable más alejadas de la línea media al arrollarse aquél en la polea. Sea s una longitud cualquiera de cable arrollado, d_1 el diámetro del cable. El alargamiento de la fibra que más trabaja en la longitud s es:

$$\varepsilon = \frac{d_1 s}{2a}$$

Y la tensión correspondiente

$$T_i = E\,\frac{\varepsilon}{s} = \frac{E\,d_1}{2\,a}$$

Expresando ahora que la tensión máxima por unidad de superficie que sufre el cable es igual á la de ruptura por el coeficiente de seguridad, á cuyo producto llamaremos k, se tendrá la siguiente relación

$$\rho\,v^2 + \frac{\rho\,g}{\cos\gamma_1}\,\frac{d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_1}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma_1} + \frac{E\,d_1}{2\,a} = k \qquad (50)$$

la cual, fijado el valor de la sección nos dará á conocer γ_1, dándonos entonces las (49) el valor de γ_2

Conocidos γ_1 y γ_2 fácil es calcular la longitud l del cable. Se tendrá en efecto

$$\frac{l}{2} = m_1\,s\,\mathfrak{h}\,\frac{d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_1}{m_1} + m_2\,s\,\mathfrak{h}\,\frac{d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_2}{m_2} + (\pi - \gamma_1 + \gamma_2)\,a$$

$$= \frac{(d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_1)\,tg\,\gamma_1}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma_1} + \frac{(d + a\,\mathrm{sen}\,\gamma_2)\,tg\,\gamma_2}{arg\,s\,\mathfrak{h}\,tg\,\gamma_2} + (\pi - \gamma_1 + \gamma_2)\,a$$

$$= \frac{l}{\rho\,g}\left[\left(k - \frac{E d_1}{2\,a} - \rho\,v^2\right)(\mathrm{sen}\,\gamma_1 - \mathrm{sen}\,\gamma_2) + \frac{N}{v}\,\mathrm{sen}\,\gamma_2\right] + (\pi - \gamma_1 + \gamma_2)\,a \qquad (51)$$

En un proyecto podrá, pues, seguirse la siguiente marcha. Fijados los valores de v, N, $2d$, E, ρ y a, se escogerá un valor de la sección, guiándose por los elementos de instalaciones ya efectuadas y que funcionen bien. Con este valor admitido, se puede calcular d_1 y

$$k - \frac{E d_1}{2\,a} - \rho\,v^2\ ,$$

Sea A el valor de esta última expresión. Mediante unas tablas de senos hiperbólicos se determina sin dificultad la raíz γ_1 de la ecuación.

$$\frac{\rho g}{\cos \gamma_1} \frac{d + a \operatorname{sen} \gamma_1}{\operatorname{arg\,sh\,tg} \gamma_1} = A$$

Del mismo modo se calculará la raíz γ_2 de la ecuación

$$\frac{\rho g}{\cos \gamma_2} \frac{d + a \operatorname{sen} \gamma_2}{\operatorname{arg\,sh\,tg} \gamma_2} = \frac{N}{v \sigma} - A$$

Con los dos valores de γ_1 y γ_2 se calcula la longitud del cable por la fórmula

$$l = \frac{2A}{\rho g} (\operatorname{sen} \gamma_1 - \operatorname{sen} \gamma_2) + \frac{N}{\rho g v} \operatorname{sen} \gamma_2 + 2 (\pi - \gamma_1 + \gamma_2) a$$

con lo cual se tienen todos los elementos constructivos. Pero la solución obtenida partiendo del valor arbitrario de σ será aceptable solamente cuando cumpla las condiciones siguientes:

1.ª El par constituído por la diferencia de tensiones y que equilibra al par motor, no debe ser mayor que el par máximo de rozamiento, pues de otro modo la polea deslizaría. Traducida esta condición al lenguaje analítico, se tendrá llamando f al coeficiente de rozamiento entre la polea y el cable (V. pág. 17)

$$k < \left[\frac{N}{v \sigma} - k + \frac{E d_1}{2a} \right] e^{-f(\pi - \gamma_1 + \gamma_2)}$$

2.ª Suponiendo que el cable motriz es la catenaria inferior, es necesario que el superior no llegue á tocar al inferior. Por consiguiente, si y_2 es la altura del punto de acuerdo de la catenaria superior con la polea, se tendrá

$$y_2 - m_2 < y_1 - m_1 + a \left[\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2 \right]$$

ó sea

$$m_1 - m_2 < \frac{N}{\rho \sigma g v} + a \left[\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2 \right]$$

En vez de este cálculo exacto puede seguirse un procedimiento aproximado, substituyendo las catenarias por parábolas, despreciando los radios de las poleas y suponiendo constante la tensión á lo largo de cada uno de los dos cables, motor y de retorno. A este fin pueden utilizarse las fórmulas de la página 93.

XI.—Movimiento estacionario de un hilo en una superficie.

Introduciendo en las fórmulas 14 la fuerza de inercia, y suponiendo siempre $\rho\sigma = 1$, se tendrá

$$\mathfrak{T} + \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{dv}{dt} = 0$$

$$N\cos\theta + \mathfrak{N} + \frac{T - v^2}{\rho} = 0$$

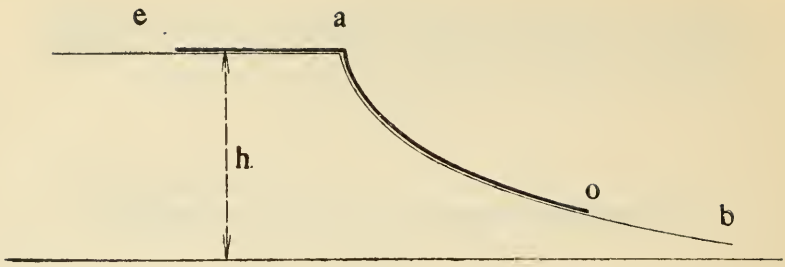
$$N\,sen\,\theta + \mathfrak{N}' = 0$$

Prescindiendo, por de pronto, del caso en que el hilo describe una geodésica de la superficie, caso sobre el que insistiremos luego, y suponiendo que $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}'$ son funciones exclusivamente de $\bar{\sigma}$, si se eliminan N y T entre las tres ecuaciones anteriores se halla

$$\frac{dv}{dt} = \mathfrak{T} - \frac{\partial}{\partial\bar{\sigma}}\left[\frac{1}{\rho}(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'\cot\theta)\right]$$

ecuación enteramente análoga á la (46), por lo que, como allí, deducimos que la velocidad es proporcional al tiempo ó es constante.

En el caso en que el hilo describa una geodésica, $\theta = 0$ y la tercera ecuación indica que es necesario, para que el movimiento estacionario sea posible, que la fuerza exterior se halle en el plano osculador de la curva. Como ejemplo de este caso, vamos á considerar el deslizamiento de un hilo en la sección recta de un cilindro horizontal del que forma parte un plano horizontal también fig. (14). La primera de las ecuaciones anteriores, habiéndola multiplicado por *ds* é integrando á toda la longitud *l* de la curva da



(Fig. 14)

$$l\frac{dv}{dt} = T_1 - T_2 + \int_o^l \mathfrak{F}\, ds$$

siendo T_1 y T_2 las tensiones extremas, datos del problema. Si la fuerza exterior es la gravedad

$$\mathfrak{F} = -g\frac{\partial y}{\partial s}$$

Observando ahora que en el plano *ac* la *y* es constante, é igual á *h* por ejemplo, se tendrá llamando y_o á la altura del punto *O* sobre el plano de referencia,

$$l\frac{dv}{dt} = T_1 - T_2 - \int_{y_o}^{h} g\, dy = T_1 - T_2 - (h - y_o)$$

La curva *ab*, suponiendo en *a* el origen de arcos $\sigma_1 = aO$, podrá venir expresada por la función *f*

$$y_o = f(\sigma_1)$$

que debe reducirse á *h* para $\sigma_1 = o$. Si el origen de arcos en la curva móvil es *O*, se tendrá llamando s_o al arco inicial *aO*,

$$\sigma_1 = s_o + \int_o^t v\, dt$$

luego

$$\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

En consecuencia, la ley del movimiento del hilo viene expresada por la ecuación diferencial

$$l\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} = T_1 - T_2 - \left(h - f(\sigma_1)\right)$$

La tensión en un punto se hallará con solo extender la integración respecto á s, de $s = o$ á la s del punto que se considere, con lo cual se tendrá:

$$s\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} = T_1 - T_s - (y_s - y_o)\,g$$

siendo

$$y_s = f(\sigma_1 - s).$$

De estas ecuaciones se deduce que si la curva es tal que sus ordenadas son proporcionales á los arcos, es decir, es una recta, las diferencias de tensiones también lo son.

Cuando todo el hilo se halle en la curva, el límite superior de la integral de dy no es la constante h sino la y_c del extremo c, y la ecuación que define el movimiento es

$$l\frac{d^2\sigma}{dt^2} = T_1 - T_2 - (y_c - y_o)\,g$$

$$= T_1 - T_2 - \left(f(\sigma_1 - l) - f(\sigma_1)\right)g$$

Si los extremos son libres, $T_1 = T_2$. Si en estas condiciones nos proponemos buscar la curva en la que el movimiento de O es independiente de la longitud l del hilo, escribiremos que

$$\frac{f(\sigma_1 - l) - f(\sigma_1)}{l}$$

es independiente de l siendo una función de σ_1, tal como $\varphi(\sigma_1)$. Derivando ahora dos veces respecto á l á

$$f(\sigma_1 - l) - f(\sigma_1) = \varphi(\sigma_1)\, l$$

se halla

$$f''(\sigma_1 - l) = o$$

luego $f''(\sigma_1) =$ constante, y la curva es una recta. En este caso todos los puntos se mueven independientemente, la tensión es nula.

Consideremos un punto á la distancia kl de O, y propongámonos ver en qué condiciones el movimiento de este punto es independiente de la longitud l del hilo. Si el origen de arcos s se traslada á este punto, la aceleración tangencial del hilo puede escribirse

$$g\,\frac{f(\sigma_1 - (1-k)\,l) - f(\sigma_1 + k\,l)}{l}$$

Si el movimiento es independiente de l, se tendrá siendo $\varphi(\sigma_1)$ una función conveniente

$$f(\sigma_1 - (1-k)\,l) - f(\sigma_1 + k\,l) = \varphi(\sigma_1)\, l$$

Derivando dos veces consecutivas respecto á l, desaparece el segundo miembro:

$$(1-k)^2 f''(\sigma_1 - (1-k)\,l) = k^2 f''(\sigma_1 + k\,l) \qquad (52)$$

Derivando otra vez

$$-(1-k)^3 f'''(\sigma_1 - (1-k)\,l) = k^3 f'''(\sigma_1 + k\,l)$$

Y dividiendo ordenadamente las dos igualdades, é integrando luego, se tendrá llamando k_1 á una constante arbitraria

$$log\ nep\ k_1 - (1-k)\ log\ nep\ f''(\sigma_1 - (1-k)\,l) = k\ log\ nep\ f''(\sigma_1 + k\,l)$$

ó sea

$$\frac{k_1}{\left(f''(\sigma_1 - (1-k)\,l)\right)^{1-k}} = \left(f''(\sigma_1 + k\,l)\right)^k \qquad (53)$$

De las ecuaciones 52 y 53 se deduce

$$f''(\sigma_1 + k\,l) = k_1 \left(\frac{1-k}{k}\right)^{2(1-k)}$$

$$f''\left(\sigma_1 - (1-k)\,l\right) = k_1 \left(\frac{k}{1-k}\right)^{2k}$$

y como estas igualdades deben verificarse para todo valor de l, es necesario que si $k_1 \lessgtr o$

$$\frac{1-k}{k} = 1$$

luego

$$k = \frac{1}{2}$$

El caso en que $k_1 = o$ y en que, por lo tanto, f es lineal, ha sido examinado ya. Por consecuencia, si la trayectoría no es una recta, el único punto cuyo movimiento es independiente de la longitud l del hilo es el punto medio del mismo cuando la curva trayectoria es una cicloide, pues así lo exige el ser f'' constante y por lo tanto f cuadrática:

$$y = k_1 \sigma_1^2 + Const.$$

En el caso de la fig. (14) supongamos la densidad variable, lo que equivale á suponer g función de s. La ecuación que define el movimiento será

$$l\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} = T_1 - T_2 + \int_o^{\sigma_1} g\,f'(\sigma_1 - s)\,ds$$

El problema directo que hemos presentado hasta ahora tiene dos inversos. Se puede, en efecto, dar la ley del movimiento, es decir, σ_1 en función del tiempo, y una de las dos cantidades g ó f (*) en función de sus argumentos y

(*) Myller, Sur le mouvement d'une chaine pesante sur une cororbe fixe Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909.

determinar la otra. Este segundo problema inverso en sus dos aspectos conduce á la resolución de una ecuación integral tipo Volterra. Así, por ejemplo, supongamos conocida la curva y por determinar la ley de la densidad que hace que el hilo adquiera un movimiento dado. Poniendo

$$l\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} - (T_1 - T_2) = \varphi(\sigma_1) \quad ,$$

se debe determinar g por la condición

$$\varphi(\sigma_1) = \int_o^{\sigma_1} g(s) f'(\sigma_1 - s)\, ds \tag{54}$$

Integrando por partes, y suponiendo f finito en el intérvalo $o - \sigma_1$ del argumento

$$\varphi(\sigma_1) = f(\sigma_1)\, g(o) - h\, g(\sigma_1) + \int_o^{\sigma_1} g(s) f(\sigma_1 - s)\, ds$$

ó sea

$$g(\sigma_1) = \psi(\sigma_1) + \frac{1}{h}\int_o^{\sigma_1} g(s) f(\sigma_1 - s)\, ds \tag{55}$$

habiendo puesto

$$\psi(\sigma_1) = f(\sigma_1)\, g(o) - \varphi(\sigma_1)$$

Para hallar la solución continua, suponiendo ψ continua, de la ecuación integral de segunda especie (55), puede utilizarse el método de aproximaciones sucesivas de Liouville (*). Suponiendo que 55 tiene una solución continua, substituyamos en el segundo miembro en vez de g todo el segundo miembro, y repitamos esta operación indefinidamente. Se tendrá:

(*) Bocher, Integral Equations. Cambridge, 1909.

$$g(\sigma_1) = \psi(\sigma_1) + \frac{1}{h}\int_o^{\sigma_1} f(\sigma_1 - \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{h^2}\int_o^{\sigma_1} f(\sigma_1 - \xi)\,d\xi \int_o^{\xi} f(\xi - \xi_1)\,\psi(\xi_1)\,d\xi_1 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{h^{n-1}}\int_o^{\sigma_1} f(\sigma_1 - \xi)\,d\xi \int_o^{\xi} f(\xi - \xi_1)\,d\xi_1 \cdots - \int_o^{\xi_{n-2}} f(\xi_{n-2} - \xi_{n-1})\,d\xi_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{h^n}\int_o^{\sigma_1} f(\sigma_1 - \xi)\,d\xi \int_o^{\xi} f(\xi - \xi_1)\,d\xi_1 \cdots - \int_o^{\xi_{n-1}} f(\xi_{n-1} - \xi_n)\,g(\xi_n)\,d\xi_n$$

Consideremos ahora la serie

$$F(\sigma_1) = \psi(\sigma_1) + \Sigma \frac{1}{h^n}\int_o^{\sigma_1} f(\sigma_1 - \xi)\,d\xi \int_o^{\xi} f(\xi - \xi_1)\,d\xi_1 \cdots - \int_o^{\xi_{n-1}} f(\xi_{n-1} - \xi_n)\,d\xi_n \quad (56)$$

Supongamos que M y N son dos constantes tales que, en valor absoluto, para $o \leq s \leq \sigma_1$,

$$\frac{f(\sigma_1 - s)}{h} < M$$

$$(\psi\,\sigma_1) < N$$

El valor absoluto del término general de la serie considerada, será, todo lo más, igual á

$$N\,M_{n+1}\int_o^{\sigma_1} d\xi \int_o^{\xi} d\xi_1 \cdots \int_o^{\xi_{n-1}} d\xi_n = N\,M^{n+1}\,\frac{(\sigma_1)^{n+1}}{(n+1)!} = N\,\frac{(M\,\sigma_1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

La serie es por lo tanto convergente. Pero además satisface á la ecuación integral propuesta, como se ve calculando $F(s)$, multiplicando luego por

$$\frac{1}{h}\,f(\sigma_1 - \xi)$$

é integrando respecto á s entre o y σ_1 , el resultado es $g(\sigma_1) - \psi(\sigma_1)$

Cuando en la ecuación 54 la función f es de la forma

$$m\,(\sigma_1 - s)^{\lambda} + h$$

siendo $o < \lambda < 1$, como ocurre, verbigracia, para la parábola semicúbica y la tractriz en cuyos casos la derivada f' es de la forma

$$\frac{n}{(\sigma_1 - s)^{\mu}}$$

teniendo μ la misma limitación que antes λ, ya que $\mu = 1 - \lambda$, puede procederse á hallar la solución de 54 por el método de Abel, partiendo de la conocida fórmula

$$\int_s^z \frac{d\,\sigma_1}{(z-\sigma_1)^{1-\mu}(\sigma_1 - s)^{\mu}} = \frac{\pi}{sen\ \mu\ \pi}$$

la cual multiplicada por $\Phi'(s)\ ds$ é integrada en ambos miembros entre o y z, dá

$$\int_o^z \frac{d\,\sigma_1}{(z-\sigma_1)^{1-\mu}} \int_o^{\sigma_1} \frac{\Phi'(s)\,ds}{(\sigma_1 - s)^{\mu}}\,ds = \frac{\pi}{sen\ \mu\ \pi}\left[\Phi(z) - \Phi(o)\right] \qquad (57)$$

Multiplicando los dos términos de (54) por $(z-\sigma_1)^{\mu-1}\,d\,\sigma_1$ é integrando entre o y z

$$\int_o^z \frac{\varphi(\sigma_1)}{(z-\sigma_1)^{1-\mu}}\,d\,\sigma_1 = n \int_o^z \frac{d\,\sigma_1}{(z-\sigma_1)^{1-\mu}} \int_o^{\sigma_1} \frac{g(s)\,ds}{(\sigma_1 - s)^{\mu}}$$

y el segundo miembro, en virtud de 57, es igual á

$$\frac{\pi}{sen\ \mu\ \pi} \int_o^{\sigma_1} g(s)\,ds$$

de manera que

$$g(z) = \frac{sen\ \mu\ \pi}{\pi}\,\frac{d}{dz} \int_o^z \frac{\varphi(s)\,ds}{(z-s)^{1-\mu}}$$

Para que la solución continua dada por esta fórmula exista, es evidentemente necesario que φ lo sea así como es necesaria la existencia de la derivada continua de la integral.

Cuando todo el hilo se halla en la curva, el límite superior de la integral en la ecuación 54 ya no es σ_1 sino l la longitud del hilo. La naturaleza de la ecuación es diferente (*).

Las ecuaciones del movimiento de un hilo en una curva, movimiento que es forzosamente estacionario, son análogos á las ya establecidas para una superficie. Representa aquí, como allí, N la reacción normal y θ es el ángulo que su dirección forma con la normal principal. Para el caso de hilo sometido á la acción de la gravedad, la primera de las ecuaciones intrínsecas nos dice que el movimiento se conservará el mismo en cualquiera de las posiciones que adquiera, suponiéndola invariablemente unidad al cilidro que la proyecta verticalmente, al deformar éste conservando la verticalidad de las generatrices y en la hipótesis de ser inextensible. Por consiguiente, el movimiento en una línea (hélice) que corte á las generatrices según ángulos iguales, es igual al movimiento según una recta.

XII.—Oscilaciones de un hilo Ecuaciones generales

Vamos á deducir en este capítulo las ecuaciones que rigen el movimiento perturbado de un hilo entendiendo por tal lo siguiente. Imaginemos un hilo en movimiento, y supongamos perfectamente conocido éste mediante la resolución de las ecuaciones de Floquet, por ejemplo. Si este movimiento se perturba, de modo que en un instante dado los elementos del mismo sufren pequeñas variaciones respecto del movimiento primitivo, estas variaciones se propagan y continúan constituyendo así el movimiento perturbado. Si siendo pequeñas las iniciales, las perturbaciones son permanentemente pequeñas, el movimiento primitivo será estable. En caso contrario, inestable.

En el análisis que sigue supondremos que las perturbaciones independientes y las que son funciones de aquéllas son tan pequeñas que puede prescindirse de sus cuadrados y productos no sólo de las perturbaciones, sino de las variaciones que experimenten ya con el arco, ya con el tiempo, referidas al arco ó tiempo, es decir, de los cuadrados y productos de sus derivadas y de productos de las variaciones por sus derivadas. Si como resultado de la resolución, adaptada á

(*) Bocher, l. c. pág. 63.

las condiciones iniciales y límites, alguna de las perturbaciones creciera saliéndose de la pequeñez de la hipótesis, debe interpretarse el resultado como imposibilidad de un movimiento estable é insuficiencia de la hipótesis y planteo.

El procedimiento que vamos á seguir es el planteo de las ecuaciones fundamentales, consistirá aplicar las ecuaciones de Floquet al movimiento perturbado, del siguiente modo:

Distinguiremos por guiones colocados encima de las letras que representan las diversas cantidades á los valores de las mismas, referidos á la tangente normal principal y binormal en el movimiento perturbado. Las seis primeras ecuaciones cinemáticas de Floquet adoptarán la forma

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial t} = q\bar{r}_1$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial s} = \bar{r}\bar{p}_1 - \bar{p}\bar{r}_1$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial t} = -\bar{q}\bar{p}_1$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial s} = \bar{\eta}\bar{r}_1$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial s} = \bar{r} - \bar{\xi}\bar{r}_1 + \bar{\zeta}\bar{p}_1$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} = -\bar{\eta}\bar{p}_1 - \bar{q}$$

Y las tres dinámicas serán

$$\rho\sigma\left[\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{q}\bar{\zeta} - \bar{r}\bar{\eta}\right] = \frac{\partial \bar{T}}{\partial s} + \rho\sigma\bar{\mathfrak{F}}$$

$$\rho\sigma\left[\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \bar{r}\bar{\xi} - \bar{p}\bar{\zeta}\right] = \bar{T}\bar{r}_1 + \rho\sigma\bar{\mathfrak{N}}$$

$$\rho\sigma\left[\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \bar{p}\bar{\eta} - \bar{q}\bar{\xi}\right] = \rho\sigma\bar{\mathfrak{B}}$$

Evidentemente, ϱ, σ y s son los mismos ahora que en el movimiento conocido, por cuya razón no hay necesidad de proveerles del guión.

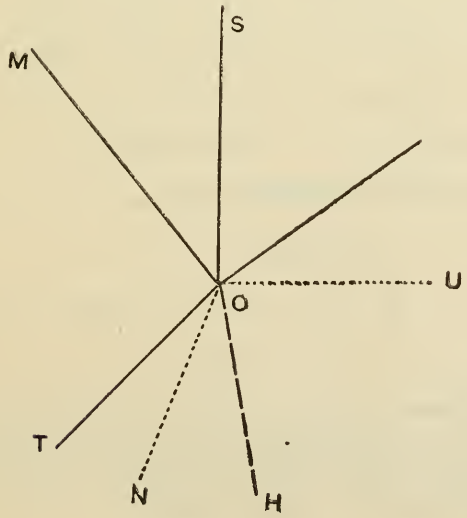
Las nuevas cantidades diferirán poco de las primitivas. Podemos, en primer lugar, poner

$$\overline{T} = T + T'$$
$$\overline{p}_1 = p_1 + p_1'$$
$$\overline{r}_1 = r_1 + r_1'$$

siendo T' p'_1 y r'_1 cantidades pequeñas que expresan la diferencia entre los nuevos valores para el movimiento perturbado y los valores antiguos para el movimiento conocido.

Para relacionar el resto de las cantidades provistas de guión con las antiguas, seguiremos otro camino. Sean.

$$\xi + \xi' \quad , \quad \eta + \eta' \quad , \quad \zeta + \zeta' \quad , \quad p + p' \quad , \quad q + q' \quad , \quad r + r' \, ,$$
$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}' \quad , \quad \mathfrak{D} + \mathfrak{D}' \quad , \quad \mathfrak{B} + \mathfrak{B}'$$



(Fig. 15)

los valores de las nuevas cantidades en el movimiento perturbado, referidas á los ejes *OS*, *OT* y *OU* fig. (15) del movimiento conocido. Sean, además θ', $= -$ *SOM* $\varphi' = -$ *NOH* y $\psi' = -$ *TOH* los ángulos de Euler que la tangente, normal principal y binormal en el movimiento perturbado forman con la tangente, normal principal y binormal en el movimiento conocido. El ángulo θ' será el que formen las dos tangentes en puntos correspondientes, es decir, que tengan la misma s; los ángulos φ' y ψ' serán los ángulos que las binormales forman con la recta de intersección de los planos normales.

Para obtener los valores de las proyecciones sobre los ejes del movimiento perturbador de un vector cuyas componentes sobre los del movimiento primitivo sean A, B y C, respectivamente, se procederá al modo ordinario, proyectando sobre cada uno de los ejes del movimiento perturbado las proyecciones A, B y C, respectivamente, y sumando luego. En la figura (15) para evaluar los cosenos de los ángulos que forman los ejes de los dos movimientos se ha aplicado la fórmula fundamental de Trigonometría esférica al triedro constituído por los dos ejes cuyo coseno se calcula y la recta de intersección de los planos normales.

Se tendrá, pues:

$$\overline{A} = A\cos\theta + B\left[\cos\psi'\,\mathrm{sen}\,\theta'\right] + C\left[\mathrm{sen}\,\psi'\,\mathrm{sen}\,\theta'\right]$$

$$\overline{B} = -A\cos\varphi'\,\mathrm{sen}\,\theta' + B\left[\mathrm{sen}\,\varphi'\,\mathrm{sen}\,\psi' + \cos\theta'\right]$$

$$\overline{C} = -A\,\mathrm{sen}\,\varphi'\,\mathrm{sen}\,\theta' + B\left[-\mathrm{sen}\,\psi'\cos\varphi' - \mathrm{sen}\,\varphi'\cos\psi'\cos\theta'\right]$$
$$+ C\left[\cos\varphi'\cos\psi' - \mathrm{sen}\,\varphi'\,\mathrm{sen}\,\psi'\cos\theta'\right]$$

O bien, dentro de la aproximación indicada,

$$\overline{A} = A + B\theta'$$

$$\overline{B} = -A\theta' + B + C(\varphi' + \psi')$$

$$\overline{C} = -B(\varphi' + \psi') + C$$

Si en estas fórmulas substituimos en vez de A, B y C, en primer lugar, $\xi + \xi'$, $\eta + \eta'$ y $\zeta + \zeta'$; en segundo lugar $p + p$, $q + q'$ y $r + r'$; y finalmente $T + T$ $N + N'$ y $B + B'$ se tendrán las siguientes fórmulas que relacionan los valores de estas cantidades referidas á los ejes nuevos con los valores antiguos y las perturbaciones, referidas éstas á los ejes antiguos.

$$\overline{\xi} = \xi + \xi' + \eta\,\theta'$$

$$\overline{\eta} = -\,\xi\,\theta' + (\eta + \eta) + \zeta\,(\varphi' + \psi')$$

$$\overline{\zeta} = -\,\eta\,(\varphi' + \psi') + \zeta + \zeta'$$

$$\overline{p} = p + p' + q\,\theta'$$

$$\overline{q} = -\,p\,\theta' + q + q' + r\,(\varphi' + \psi')$$

$$\overline{r} = -\,q\,(\varphi' + \psi') + r + r'$$

$$\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}' + \mathfrak{D}\mathfrak{C}\,\theta'$$

$$\overline{\mathfrak{D}\mathfrak{C}} = -\,\mathfrak{F}\,\theta' + \mathfrak{D}\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\mathfrak{C}' + \mathfrak{B}\,(\varphi' + \psi')$$

$$\overline{\mathfrak{B}} = -\,\mathfrak{D}\mathfrak{C}\,(\varphi' + \psi') + \mathfrak{B} + \mathfrak{B}'$$

Las rotaciones p', q', r' se hallan relacionadas con los ángulos θ', φ', ψ', por las fórmulas conocidas, y que, por otra parte, pueden hallarse fácilmente, proyectando sobre cada uno de los ejes del movimiento primitivo ó conocido, las tres rotaciones propias á los ángulos de Euler, á saber: la rotación $\frac{\partial\,\theta'}{\partial\,t}$ dirigida según la intersección de los planos normales y las rotaciones $\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,t}$ y $\frac{\partial\,\psi'}{\partial\,t}$ dirigidas según las tangentes. Por consiguiente:

$$p' = \frac{\partial\,\psi'}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,t}\cos\theta'$$

$$q' = -\,\frac{\partial\,\theta'}{\partial\,t}\,sen\,\varphi' + \frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,t}\cos\varphi'\,sen\,\theta'$$

$$r' = \frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,t}\,sen\,\psi'\,sen\,\theta' + \frac{\partial\,\theta'}{\partial\,t}\cos\psi'$$

ó sea

$$\left.\begin{aligned} p' &= \frac{\partial\,\psi'}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,t} \\ q' &= -\,\frac{\partial\,\theta'}{\partial\,t}\,\varphi' + \frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,t}\,\theta' \\ r' &= \frac{\partial\,\theta'}{\partial\,t} \end{aligned}\right\} 58$$

Llevando ahora los valores de $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\zeta}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{\mathfrak{F}}$, $\bar{\mathfrak{M}}$ y $\bar{\mathfrak{B}}$ á las ecuaciones de Flocquet, se tendrán las nueve ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p'}{\partial s} + \frac{\partial (q\theta')}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} = -p r_1 \theta' + r_1 q' = q r'_1 \\
&\frac{\partial q'}{\partial s} - \frac{\partial (p\theta')}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} r(\varphi' + \psi') = p_1 r' - p_1 q(\varphi' + \psi') + r p'_1 - p' r - q r_1 \theta' - p r'_1 \\
&\frac{\partial r'}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} q(\varphi' + \psi') - \frac{\partial r'_1}{\partial t} = p p_1 \theta' - p_1 q' - p_1 r(\varphi' + \psi') - q p'_1
\end{aligned}\right\} 59$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi'}{\partial s} + \frac{\partial (\eta\theta')}{\partial s} = \eta' r_1 + \zeta r_1(\varphi' + \psi') - \xi r_1 \theta' + \eta r'_1 \\
&\frac{\partial \eta'}{\partial s} - \frac{\partial (\xi\theta')}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \zeta(\varphi' + \psi') = r' - q(\varphi' + \psi') - \xi r'_1 - r_1 \xi' - r_1 \eta\theta + \zeta p_1 + p_1 \zeta' - p_1 \eta(\varphi' + \psi') \\
&\frac{\partial \zeta'}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \eta_1(\varphi' + \psi') = -p_1 \xi\theta' - p_1 \eta_1 - p_1 \zeta(\varphi' + \psi') - \eta_1 p'_1 + p\theta' - q' - r(\varphi' + \psi')
\end{aligned}\right\} 60$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \frac{\partial (\eta_1 \theta')}{\partial t} - p\theta'\zeta + \zeta q' + r\zeta(\varphi' + \psi') + q\zeta' - q\eta_1(\varphi' + \psi') + \xi r\theta' - r\eta' - r(\varphi' + \psi') - \eta r' + \eta q(\varphi' + \psi')$$
$$= \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathfrak{F}' + \mathfrak{M}\theta'$$

$$\frac{\partial \eta'_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \zeta(\varphi' + \psi') - \frac{\partial (\zeta\theta')}{\partial t} + r\xi' + r\eta\theta' + \xi r' - \xi q(\varphi' + \psi') - p\zeta' + p\eta_1(\varphi' + \psi') - \zeta p' - \zeta q\theta'$$
$$= \frac{T r'_1 + T' r_1}{\rho\sigma} + \mathfrak{M}' - \mathfrak{F}\theta' + \mathfrak{B}(\varphi' + \psi')$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \eta(\varphi' + \psi') + p\eta' + p\zeta(\varphi' + \psi') + \eta p' + \eta q\theta - q\xi' - q\eta\theta' - \xi q' - r(\varphi' + \psi')$$
$$= \mathfrak{B}' - \mathfrak{M}(\varphi' + \psi)$$

Mediante las 12 ecuaciones 58, 59, 60 y 61 se podrán determinar los valores de ξ', η', ζ', p', q', r', p'_1, r'_1, T', θ', φ' y ψ' en función de s y t de las cuales dependen las demás cantidades que figuran en las ecuaciones.

Vamos á considerar algunos casos particulares.

1.° Supongamos que el movimiento primitivo es plano. Se tiene entonces $B = \zeta = p = q = p_1 = o$. Y por consiguiente, las ecuaciones 59,60 y 61 se convierten en las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} = r_1 q' \\ &\frac{\partial q'}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} r(\varphi' + \psi') = r p'_1 - p' r' \\ &\frac{\partial r'}{\partial s} - \frac{\partial r'_1}{\partial t} = o \end{aligned}\right\} 61$$

Ahora bien, puesto que la última de los 58 nos dice que $r' = \frac{\partial \theta'}{\partial t}$, de la ecuación últimamente escrita se deduce

$$r'_1 = \frac{\partial \theta'}{\partial s}$$

Las otras ecuaciones serán

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi'}{\partial s} + \theta' \frac{\partial \eta}{\partial s} = \eta' r_1 - \xi r_1 \theta' \\ &\frac{\partial \eta'}{\partial s} - \theta' \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial \theta'}{\partial t} - r_1 \xi' - r_1 \eta \theta' \\ &\frac{\partial \zeta'}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \eta(\varphi' + \psi') = -q' - r(\varphi' + \psi') - \eta p'_1 \end{aligned}\right\} 62$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \theta' \frac{\partial \eta}{\partial t} + \xi r \theta' - r \eta' - r(\varphi' + \psi') = \frac{1}{\rho \sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathfrak{F}' + \mathfrak{D}\mathfrak{C} \theta' \\ &\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \theta' \frac{\partial \xi}{\partial t} + r(\xi' + \eta \theta') = \frac{1}{\rho \sigma} \left(T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' r_1 \right) + \mathfrak{D}\mathfrak{C}' - \mathfrak{F} \theta' \\ &\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \eta_1(\varphi' + \psi') + \eta p' - \zeta q' - \zeta(\varphi' + \psi') = \mathfrak{B}' - \mathfrak{D}\mathfrak{C}(\varphi' + \psi') \end{aligned}\right\} 63$$

Si el movimiento perturbado es también plano, las ecuaciones anteriores se

simplifican notablemente, reduciéndose á las cuatro siguientes, por ser $p' = q' = \zeta' = \varphi' = \psi' = p'_1 = o$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial s} + \theta' \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \eta' \frac{\partial \theta}{\partial s} - \xi \theta' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} - \theta' \frac{\partial \xi}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \frac{\partial \theta'}{\partial s} \xi' - \eta \theta' \frac{\partial \theta}{\partial s} \end{aligned}\right\} 64$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \theta' \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \theta' \xi \frac{\partial \theta}{\partial t} = \eta' \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathfrak{F}' + \mathfrak{D}\mathfrak{C} \theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} - \theta' \frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi' \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \eta' \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{\rho \sigma} \left[T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right] &+ \mathfrak{D}\mathfrak{C}' - \mathfrak{F} \theta \end{aligned}\right\} 65$$

Estas cuatro ecuaciones permiten expresar θ', ξ', η' y T' en funciones de s y t dadas las condiciones iniciales y límites.

2.° Como á segundo caso particular consideremos el movimiento estacionario de un hilo. Para hallar las ecuaciones del movimiento perturbado, bastará hacer en las fórmulas generales $\xi = v$, $\eta = \zeta = B = q = o$.

Habrá que añadir á las fórmulas (58) las nueve fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} &= - p r_1 \theta' + r_1 q' \\ \frac{\partial q'}{\partial s} - \frac{\partial (p \theta')}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} r (\varphi' + \psi') &= p_1 r' + r p'_1 - r_1 p' - p r'_1 \\ \frac{\partial r'}{\partial s} - \frac{\partial r'_1}{\partial t} &= p p_1 \theta' - p_1 q' - p_1 r (\varphi' + \psi') \end{aligned}\right\} 66$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial s} &= r_1 \eta' - v r_1 \theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} - \frac{\partial (v \theta')}{\partial s} &= r' - v r'_1 - r_1 \zeta' + p_1 \zeta' \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial s} &= - p_1 v \theta' - p_1 \eta' + p_1 \theta' - q' - r (\varphi' + \psi') \end{aligned}\right\} 67$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi'}{\partial t} + v r \theta' - r \eta' + r(\varphi' + \psi') = \frac{1}{\rho \sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} = \mathfrak{F}' + \mathfrak{D} \theta' \\
&\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial (v \theta')}{\partial t} + r \xi' + \xi r' - p \zeta' = \frac{T r'_1 + T' r_1}{\rho \sigma} + \mathfrak{D}' - \mathfrak{F} \theta' \\
&\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - p \eta' - \xi r (\varphi' + \psi') = \mathfrak{B}' - \mathfrak{D} (\varphi' + \psi')
\end{aligned}\right\} 68$$

Si el movimiento primitivo fuera plano, habría que hacer en las fórmulas anteriores $p = p_1 = \eta = \zeta = o$, con lo cual las nueve últimas se simplifican, convirtiéndose en las nueve siguientes, ya que la tercera de las 66 dá $r'_1 = \frac{\partial \theta'}{\partial s}$,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial s} q' \\
&\frac{\partial q'}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} r(\varphi' + \psi') = -\frac{\partial \theta}{\partial s} p' \\
&\frac{\partial^2 \theta'}{\partial s \, \partial t} = \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t \, \partial s}
\end{aligned}\right\} 69$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi'}{\partial s} = (\eta' - v \theta') \frac{\partial \theta}{\partial s} \\
&\frac{\partial \eta'}{\partial s} = \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial s} \xi' \\
&\frac{\partial \zeta'}{\partial s} = -q' - \frac{\partial \theta}{\partial t} (\varphi' + \psi)
\end{aligned}\right\} 69 \text{ bis}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \left[v \theta' - \eta' + \varphi' + \psi' \right] = \frac{1}{\rho \sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} \mathfrak{F} + \mathfrak{D} \theta' \\
&\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \theta' \frac{\partial v}{\partial t} + \xi' \frac{\partial \theta'}{\partial t} = \frac{1}{\rho \sigma} \left[T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right] + \mathfrak{D}' \mathfrak{F} \theta' \\
&\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} v (\varphi' + \psi') - v q' = \mathfrak{B}' - \mathfrak{D} (\varphi' + \psi')
\end{aligned}\right\} 70$$

En virtud de la última de las 69 bis, la que acabamos de escribir puede adoptar la forma

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + v \frac{\partial \zeta'}{\partial s} = \mathfrak{B}' - \mathfrak{D}\mathfrak{U}(\varphi' + \psi') \qquad 71$$

Si el movimiento se conserva plano, $\zeta' = p' = q' = \varphi' = \psi' = o$, y las cuatro fórmulas que resuelven el problema, son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \left(\eta' - v\theta'\right) \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \xi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \end{aligned}\right\} 72$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} + (v\theta' - \eta') \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} - \theta' \frac{\partial v}{\partial t} + \xi' \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho\sigma} \left[T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + T \frac{\partial \theta}{\partial s} \right] + \mathfrak{D}\mathfrak{U}' - \mathfrak{F}\theta' \end{aligned}\right\} 73$$

que permiten conocer ζ' η' θ' y T' en función de s y t, dadas las condiciones iniciales y límites.

3.° Como á última aplicación vamos á deducir las fórmulas correspondientes al caso en que el movimiento primitivo sea nulo, es decir, que el hilo se halla en reposo.

Evidentemente las oscilaciones de un hilo en equilibrio vendrán determinadas por las ecuaciones que se deducen de las 58, 66, 67 y 68, haciendo en ellas $v = o$, $p = r = o$, con lo cual se convierten las (66), 67) y 68) en las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} &= r_1 q' \\ \frac{\partial q'}{\partial s} &= p_1 r' - r_1 p' \\ \frac{\partial r'}{\partial s} = \frac{\partial r'_1}{\partial t} &= - p_1 q' \end{aligned}\right\} 74$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \eta' r_1 \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} &= r' - r_1 \xi' + p_1 \zeta' \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial s} &= - p_1 \eta' - q'\end{aligned}\right\} 75$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathfrak{F}' + \mathfrak{N} \theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \sigma} (T r'_1 + T' r_1) + \mathfrak{N} - \mathfrak{F} \theta' \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial t} & \mathfrak{B}' - \mathfrak{N} (\varphi' + \psi')\end{aligned}\right\} 76$$

Si la figura que el hilo realiza en equilibrio es plana, se obtienen las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \eta' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial s} \xi' \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial s} &= - q'\end{aligned}\right\} 77$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial r'_1}{\partial t} &= \frac{\partial \theta}{\partial s} q'_1 \\ \frac{\partial q'}{\partial s} &= - \frac{\partial \theta}{\partial s} p'\end{aligned}\right\} 78$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathfrak{F}' + \mathfrak{N} \theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \sigma} \left[T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right] + \mathfrak{N}' - \mathfrak{F} \theta' \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial t} &= \mathfrak{B}' - \mathfrak{N} (\varphi' + \psi')\end{aligned}\right\} 79$$

Y, finalmente, si las oscilaciones del hilo no lo apartan de su plano, se tiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \eta' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \xi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \end{aligned}\right\} 80$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathfrak{T}' + \mathfrak{N} \theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \sigma} \left[T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right] + \mathfrak{N}' + \mathfrak{T} \theta' \end{aligned}\right\} 81$$

que da á conocer ξ' η' θ' y T' en función de s y t, teniendo en cuenta las condiciones iniciales y límites.

En los dos capítulos siguientes vamos á ocuparnos en algunas aplicaciones de las fórmulas que se acaban de encontrar.

XIII.—Oscilaciones de los cables en las transmisiones teledinámicas

Las ecuaciones 58, 69, 69 bis, 70 y 71, nos permitirán resolver los problemas de movimientos oscilatorios de cables teledinámicos. En ellas debemos hacer $T' = B' = N' = o$ porque la gravedad es constante. Admitiremos, además, que el cable tiene poca flecha, de modo que tomaremos $\mathfrak{N} = -g$ (*).

Considerando, en primer lugar, las oscilaciones perpendiculares al plano del movimiento normal, la ecuación 71, derivada respecto del tiempo, nos dá

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial s \, \partial t} = g \frac{\partial}{\partial t} (\varphi' + \psi')$$

Pero en virtud de la primera de las (58), el segundo miembro de la ecuación anterior vale también

$$q \; p'$$

(*) Es decir supondremos al cuadrado de θ del mismo orden que las perturbaciones.

ó sea, en virtud de la segunda de las 69

$$g\,\bar{\rho}\left[\frac{\partial q'}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}r(\varphi'+\psi')\right]$$

siendo $\bar{\rho}$ el radio de curvatura que supondremos constante. La tercera de las 69 bis nos indica que la cantidad últimamente escrita es igual á

$$-g\,\bar{\rho}\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial s^2}$$

Por consiguiente la ecuación diferencial última podrá tomar la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2\zeta'}{\partial t^2}+v\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial s\,\partial t}-g\,\bar{\rho}\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial s^2}=o$$

Cambiando de variables, y poniendo, por ejemplo

$$u=s+mt$$
$$w=s+nt$$

la expresión diferencial adquiere, en virtud de las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial^2\zeta'}{\partial s^2}=\frac{\partial^2\zeta'}{\partial u^2}+2\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial^2\zeta'}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2\zeta'}{\partial s\,\partial t}=m\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial u^2}+(m+n)\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial w}+n\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2\zeta'}{\partial t^2}=m^2\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial u^2}+2mn\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial u\,\partial w}+n^2\,\frac{\partial^2\zeta'}{\partial w^2}$$

la forma

$$\left(m^2+vm-g\bar{\rho}\right)\frac{\partial^2\zeta'}{\partial u^2}+\left[2mn+2(m+n)-2g\bar{\rho}\right]\frac{\partial^2\zeta'}{\partial u\,\partial w}+\left(n^2+vn-\bar{\rho}g\right)\frac{\partial^2\zeta'}{\partial w}=o$$

de manera, que si m y n son raíces de la ecuación

$$x^2 + v\,x - g\,\bar{\rho} = o$$

podrá reducirse á

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u\, \partial w} = o$$

cuya solución es:

$$\zeta' = F_1(u) + F_2(v)$$

siendo F_1 y F_2 funciones arbitrarias. Los valores de m y n son

$$\begin{matrix} m \\ u \end{matrix} \Big\} \frac{-v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} + g\,\bar{\rho}}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} \zeta' = {} & F_1\left[s - \left[\frac{v}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} + g\,\bar{\rho}}\right] t\right] \\ & + F_2\left[s - \left[\frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + g\,\bar{\rho}}\right] t\right] \end{aligned} \qquad (82)$$

Al fijar las condiciones límites desaparece la arbitrariedad de las funciones F_1 y F_2. Así, por ejemplo, si en las poleas directrices los puntos que corresponden á valores dados σ_o y σ_l de σ, esto es, de $s + vt$, ejecutan las ζ correspondientes, oscilaciones conocidas $\varphi_o(t)$ y $\varphi_e(t)$, se tendrá

$$\begin{aligned} & F_1\left[\bar{\sigma}_o - 3\,\frac{vt}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + g\,\bar{\rho}}\; t\right] \\ & + F_2\left[\bar{\sigma}_o - 3\,\frac{vt}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} + g\,\bar{\rho}}\; t\right] = \varphi_o(t) \\ & F_1\left[\bar{\sigma}_l - 3\,\frac{vt}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + g\,\bar{\rho}}\; t\right] \\ & + F_2\left[\bar{\sigma}_l - 3\,\frac{vt}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + g\,\bar{\rho}}\; t\right] = \varphi_l(t) \end{aligned}$$

de donde se deducen las formas de F_1 y F_2.

Consideremos ahora el movimiento perturbado en el plano del cable teledinámico. En las fórmulas 72 y 73 se supondrá, como en el caso anterior $\rho\sigma = 1$, y, como quiera que la única fuerza exterior es la gravedad, $\mathfrak{F}' = \mathfrak{N}' = o$. Nos limitaremos además al caso en que la pequeñez relativa de la flecha permite suponer constante la tensión y radio de curvatura, cuyas derivadas respecto á s son del orden del ángulo que, con el horizonte, forma la tangente. Es decir, se supondrá á este ángulo del orden de las perturbaciones. Además, siendo la velocidad v constante, se tiene evidentemente

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{v}{\rho}$$

Las ecuaciones 72 y 73 se podrán escribir, por lo tanto, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \eta' - v\,\theta' \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta'}{\partial t} - \xi' \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} + (v\,\theta' - \eta')\frac{v}{\rho} &= \frac{\partial T'}{\partial s} + \frac{v^2 - T}{\rho}\theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\zeta' v}{\rho} &= T\frac{\partial \theta'}{\partial s} + \frac{T'}{\rho} + \frac{\partial T}{\partial s}\theta' \end{aligned} \tag{84}$$

habiendo puesto en vez de $\mathfrak{F}$ su igual $-\frac{\partial T}{\partial s}$ en virtud de la primera condición en el movimiento no perturbado, y en vez de $\mathfrak{N}$ su igual $\frac{v^2 - T}{\rho}$. Si en la primera de las fórmulas 84 se substituye el valor de $v\,\theta' - \eta'$ sacado de la primera de las 83, y en la segunda (84) el de ξ' dado por la segunda de (83), se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} - v\frac{\partial \zeta'}{\partial s} &= \frac{\partial T'}{\partial s} + \frac{v^2 - T}{\rho}\theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} - v\frac{\partial \eta'}{\partial s} + v\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= T\frac{\partial \theta'}{\partial s} + \frac{T'}{\rho} + \frac{\partial T}{\partial s}\theta' \end{aligned} \tag{85}$$

Cambiemos de variables, introduciendo en vez de las s y t las $\bar{\sigma}$ y t, definida la primerá por

$$\bar{\sigma} = s + vt$$

Evidentemente, si $f(s, t)$, representa una función de s y t, y $f(\bar{\sigma} - vt, t)$ la transformada, se tendrá indicando $f(s, t)$ por f_s y $f(\bar{\sigma} - vt, t)$ por f_σ,

$$\frac{\partial f_s}{\partial s} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial \bar{\sigma}}$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial \bar{\sigma}^2}$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} v$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial \bar{\sigma}\,\partial t} + \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial \sigma^2} v^2$$

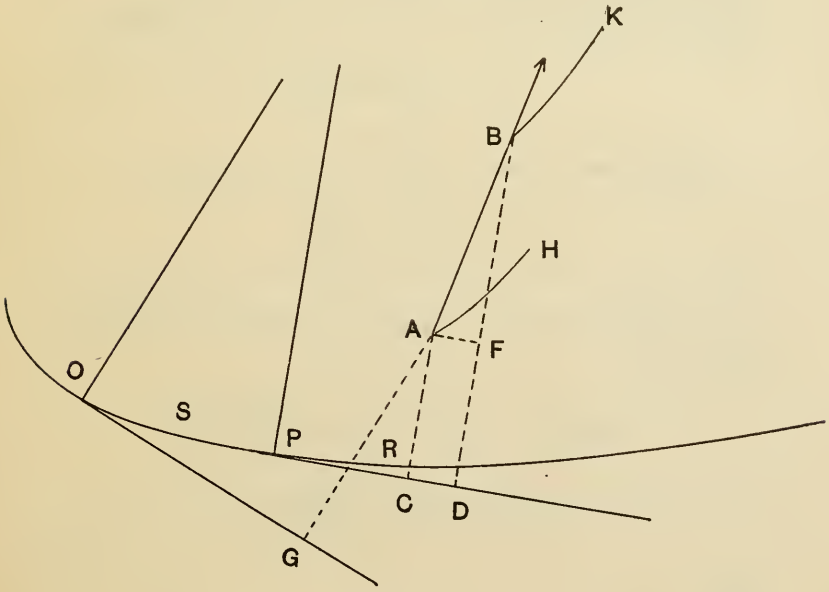
$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial s\,\partial t} + \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial \sigma^2} v^2$$

Aplicando estas fórmulas á las ecuaciones 83 y 85, se tendrán las nuevas fórmulas siguientes en que todas las cantidades se ponen expresadas en función de $\bar{\sigma}$ y t.

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\frac{\partial \xi'}{\partial \bar{\sigma}} &= \eta' - v\theta' \\ \rho\frac{\partial \eta'}{\partial \bar{\sigma}} &= \rho\left[\frac{\partial \theta'}{\partial t} + v\frac{\partial \theta'}{\partial \bar{\sigma}}\right] - \xi' \end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{\partial T'}{\partial \bar{\sigma}'} + \frac{v^2 - T}{\rho}\theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} + v^2\frac{\partial \theta'}{\partial \sigma} + v\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= T\frac{\partial \theta'}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{T'}{\bar{\rho}} + \frac{\partial T}{\partial \bar{\sigma}}\theta' \end{aligned} \tag{87}$$

Las ecuaciones 83 y 85, así como las 86 y 87, pueden transformarse introduciendo las coordenadas rectangulares α y β de un punto del cable en el movimiento perturbado, referidas á la tangente y normal principal en el punto correspondiente del elemento en el movimiento conocido. Para hallar la relación entre α y β, y ξ' y η' razonaremos como sigue: Sea OS el elemento ds en el tiempo, t, y PR la posición del mismo en el tiempo $t + dt$. en el movimiento conocido. El elemento se habrá corrido en la trayectoría una cantidad $OP = vdt$. Los ejes á que referimos el movimiento son en el instante t y para el punto A homólogo del O, el OG y su perpendicular, de modo que las coordenadas α y β de A son $OG = \alpha$ y $AG = \beta$. El elemento ds en el movimiento perturbado se supone en AH en el instante t, y en BK en el instante $t + dt$. Las coordenadas $\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial t} dt$ y $\beta + \frac{\partial \beta}{\partial t} dt$ del punto B son PD y BD, respectivamente. Trácese por A la paralela AC á BD y limítese en C donde encuentra á PD. La velocidad de A al pasar á B está dirigida según AB, y es igual á $\frac{AB}{dt}$, teniendo por componentes, según los ejes PD y su perpendicular, los valores



(Fig. 15)

$\zeta + \zeta'$ y η'

respectivamente. Luego

$$CD = (\zeta + \zeta')\, dt$$

$$BF = (\eta + \eta')\, dt$$

siendo F el pie de la perpendicular á BD trazada por A. Ahora bien, según se desprende de la figura,

$$\left.\begin{aligned} CD &= OD - OC + OP \\ BF &= BD - AC \end{aligned}\right\} 88$$

Pero, observando que el ángulo de los ejes OG y PD vale $\frac{v}{\rho}\, dt$, y proyectando sobre AC la línea quebrada $AG\ OC$, se tiene, dentro del primer orden,

$$AC = AG - OG\, \frac{v\, dt}{\rho}$$

Del mismo modo, proyectando sobre OC la misma línea quebrada,

$$OC = OG + AG\, \frac{v\, dt}{\rho}$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta cuanto llevamos dicho, las dos igualdades 88 nos dan:

$$(\zeta + \zeta')\, dt = (\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial t}\, dt) - \left(\alpha + \beta\, \frac{v\, dt}{\rho}\right) + \zeta\, dt$$

$$\eta'\, dt = \beta + \frac{\partial \beta}{\partial t}\, dt - \left[\beta - \alpha\, \frac{v\, dt}{\rho}\right]$$

ó sea

$$\zeta' = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \beta \frac{v}{\bar{\rho}}$$

$$\eta' = \frac{\partial \beta}{\partial t} + \alpha \frac{v}{\bar{\rho}} \tag{89}$$

Llevados estos valores á las ecuaciones 83 se hallan entre α, β y θ las dos condiciones geométricas siguientes

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\beta}{\bar{\rho}} = o$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\alpha}{\bar{\rho}} = \theta' \tag{90}$$

En efecto, derivando estas condiciones respecto á t y teniendo en cuenta 89 y que $\bar{\rho}$ es sólo función de $s + vt$, y que por lo tanto $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = v \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial s}$, se llega á las fórmulas 96.

En virtud de 89 y 90, si se cambia de variables independientes, poniendo en vez de s y t, las variables $\bar{\sigma}$ y t, se tendrá

$$\xi' = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

$$\eta' = \frac{\partial \beta}{\partial t} + v\,\theta'$$

y las ecuaciones 87 se convierten substituyendo en vez de ξ' y η' estos valores, en las siguientes:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial T'}{\partial \bar{\sigma}} \frac{v^2 - T}{\bar{\rho}}\,\theta'$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial \theta'}{\partial s} + 2v \frac{\partial \theta'}{\partial t} = T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + \frac{T'}{\bar{\rho}} + \frac{\partial T}{\partial s}\,\theta' \tag{91}$$

En esta forma fueron dadas por Léauté en su "Théorie Generale des transmissions par câbles metalliques (*).

(*) Paris, 1882.

Volviendo á las ecuaciones 83 y 84, y considerando el caso de ser la fuerza exterior la gravedad, se tendrá

$$\frac{v^2 - T}{\rho} = -\, g \cos \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} = g \operatorname{sen} \theta$$

valores que substituídos en las 84 las convierten en las siguientes

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \frac{\eta' - v\,\theta'}{\rho} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \frac{\xi'}{\rho} \\ \frac{\partial \xi'}{\partial t} + (v\theta' - \eta')\,\frac{v}{\rho} &= \frac{\partial T'}{\partial s} - g \cos\theta\ \theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\xi' v}{\rho} &= T\,\frac{\partial \theta'}{\partial s} + \frac{T'}{\rho} - g \operatorname{sen}\theta\ \theta' \end{aligned}\right\} (92)$$

Suponiendo que la flecha es suficientemente pequeña, la segunda y cuarta de las expresiones anteriores pueden adquirir la forma simplificada

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} &= T\,\frac{\partial \theta'}{\partial s} \end{aligned}\right\} (93)$$

de las cuales se deduce

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial^2 \theta'}{\partial s^2} \quad ; \qquad 94$$

y, por consiguiente,

$$\theta' = F_1(s - \sqrt{T}\, t) + F_2(s + \sqrt{T}\, t)$$

siendo F_1 y F_2 arbitrarias. El valor de T es

$$T = Rg + v^2$$

siendo R el radio del círculo osculador en el punto más bajo de la catenaria.

Puesto θ' en esta forma, las dos ecuaciones 93 definen η' en función de F_1 y F_2. Del valor de θ' se deduce ζ' por la primera de las 92 por una integración que introduce una nueva función arbitraria del tiempo.

Finalmente la tercera de las 92 da á conocer la tensión T' por una segunda cuadratura que introduce una nueva función arbitraria del tiempo. Se tienen así cuatro funciones arbitrarias, dos del tiempo y las otras dos F_1 y F_2 de $s - \sqrt{T}\, t$ y $s + \sqrt{T}\, t$, respectivamente. La determinación de las funciones arbitrarias de que depende la solución tal como se ha presentado, sólo puede especificarse en cada problema particular. En términos generales, serán elementos determinantes la forma del cable en un instante dado y la velocidad instantánea de sus elementos, conocidas al empezar la perturbación, para $t = o$, por ejemplo. También son elementos determinantes las condiciones en los límites. Los puntos en que el cable es tangente á las poleas, directora y dirigida pueden ser fijos, ó por las circunstancias de la instalación, tener movimiento periódico especial, etc.

Según sea la forma de las condiciones límites, puede ser de alguna utilidad modificar ligeramente la solución anterior. Si en vez de s se introduce $\overline{\sigma}$ en el valor de θ'.

$$\theta' = F_1(\overline{\sigma} - (\sqrt{T} + v)\, t) + F_2(\overline{\sigma} + (\sqrt{T} - v)\, t)$$

Sean x' é y' las componentes paralelas á dos ejes coordenados rectangulares, uno de ellos vertical, del movimiento perturbado de un punto del cable de coordenada $\overline{\sigma}$ en el instante. Es decir, x' é y' son las proyecciones del segmento rectilíneo que une la posición de un punto definido por $\overline{\sigma}$ en el movimiento conocido al mismo punto ó elemento en el movimiento perturbado, en el instante t. Habida en cuenta la pequeñez de θ, para todos los puntos del cable entre las poleas, se tendrá

$$-\frac{\partial x'}{\partial \overline{\sigma}} = \theta'\,\theta$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \overline{\sigma}} = \theta'$$

Por consiguiente, si el origen de arcos se toma en el punto más bajo del cable,

$$x' = \frac{1}{R}\int \theta' \,\bar{\sigma}\, d\bar{\sigma} + f_1(t)$$

$$y' = \int \theta' \, d\bar{\sigma} + f_2(t)$$

Las condiciones límites que se refieran directamente á x' ó y, pueden tener así expresión más sencilla. Las funciones f_1 y f_2 son arbitrarias.

En vez de partir de la ecuación 94 puede partirse de la transformada en que las variables independientes son $\bar{\sigma}$ y t, á saber

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \bar{\sigma} \partial t} = Rg \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \bar{\sigma}}$$

Si en esta forma introducimos la solución trigonométrica, simbolizada por:

$$\theta' = M e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau} t + \frac{2\pi}{\lambda}\bar{\sigma}\right)}$$

la ecuación diferencial impone entre τ y λ la relación siguiente:

$$\frac{1}{\tau^2} + \frac{2v}{\tau\lambda} = \frac{Rg}{\lambda^2} \qquad (95)$$

Supongamos que los extremos ó mejor los puntos $\bar{\sigma} = \pm l$ para los que el cable es tangente á las poleas, se hallen geométricamente fijos. Puesto que

$$x' = \frac{M}{R} e^{i\frac{2\pi}{\tau}t} \int e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} + f_1(t) =$$

$$\frac{M\lambda}{2\pi R} e^{i\frac{2\pi}{\tau}t} \left[\bar{\sigma}\, e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\sigma} - \frac{\pi}{2}\right]} + \frac{\lambda}{2\pi} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\sigma}} \right] + f_1(t)$$

$$y' = Me^{i\frac{2\pi}{\tau}t}\int e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sigma}\,d\sigma \quad + f_2(t)$$

$$= \frac{M\lambda}{2\pi}\, e^{i\frac{2\pi}{\tau}t}\, e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sigma - \frac{\pi}{2}\right]} + f_2(t)$$

y dado el carácter permanente de las condiciones límites, las funciones f_1 y f_2 deberán ser de la forma

$$f_1 = \frac{-MM_1\lambda}{2\pi R}\, e^{i\frac{2\pi}{\tau}t}$$

$$f_2 = \frac{-MN_1\lambda}{2\pi}\, e^{i\frac{2\pi}{\tau}t}$$

siendo M_1 y N_1 constantes arbitrarias que dependen de la naturaleza del problema, y tales que

$$le^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}l - \frac{\pi}{2}\right]} + \frac{\lambda}{2\pi}\, e^{i\frac{2\pi}{\lambda}l} = M_1 \qquad (96)$$

$$e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}l - \frac{\pi}{2}\right]} = N_1 \qquad (97)$$

Particularizando más, supongamos que las oscilaciones sean simétricas alrededor de la vertical que pasa por el punto más bajo. La solución en θ' será de la forma

$$\theta' = Me^{i\frac{2\pi}{\tau}t}\, sen\frac{2\pi}{\lambda}\sigma$$

ó si se quiere, será la parte real de esta expresión en que M es de la forma $A—B$ siendo A y B constantes reales y arbitrarias. De las ecuaciones (96) y (97) habrá que tomar tan sólo la parte imaginaria, de modo que

$$-l\cos\frac{2\pi l}{\lambda}+\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi l}{\lambda}=M'_1 \qquad (98)$$

$$\cos\frac{2\pi l}{\lambda}=N'_1 \qquad (99)$$

Ahora bien, siendo las oscilaciones simétricas como se ha dicho, x' tiene que ser cero para $\bar{\sigma}=o$ luego

$$M'_1=o$$

El valor de N'_1 viene definido por la condición (99). La condición $M'_1=o$ determina los valores de λ que convienen al problema, á saber las raíces de la ecuación trascendente

$$tg\frac{2\pi l}{\lambda}=\frac{2\pi l}{\lambda}$$

Las raíces de la ecuación $tgr=r$, bien conocida por aparecer en multitud de cuestiones de Matemática aplicada, en especial en la teoría de la difracción en luz paralela, son, según Euler, las que da la fórmula

$$r=\frac{2n+1}{2}\pi-\frac{2}{(2n+1)\pi}-\frac{2}{3}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^3-\frac{13}{15}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^5$$

$$-\frac{146}{105}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^7-\ldots.$$

He aquí para diferentes valores de n los correspondientes de r según Lommel

n	r	n	r
1	0	9	26,6001
2	4,4934	10	29,8116
3	7,7253	11	32,9564
4	10,9041	12	36.1006
5	14,0662	13	39,2444
6	17,2208	14	42,3879
7	20,3713	15	45.5311
8	23,5195	16	48,6741

Prescindiendo de la raíz cero que no conviene al problema, la menor raíz es 4,4934. Por consiguiente, el mayor valor de λ es

$$\lambda = \frac{6,28}{4,49}\, l$$

ó aproximadamente

$$\lambda = \frac{4}{3}\, l$$

El valor correspondiente y máximo de τ es

$$\tau = \frac{4l}{3\sqrt{v^2 + gR} - v}$$

La solución general correspondiente al caso de oscilaciones simétricas en que nos estamos ocupando, se compondrá de la suma de las soluciones particulares para todos los valores admisibles para λ ó τ. Así pues, se podrá escribir la solución completa como sigue:

$$\theta' = \Sigma \left(A\, sen \frac{2\pi t}{\tau} + B\, cos \frac{2\pi t}{\tau} \right) sen \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\sigma}$$

$$x' = \Sigma \left(A\, sen \frac{2\pi t}{\tau} + B\, cos \frac{2\pi t}{\tau} \right) \frac{\lambda}{2\pi R} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\, sen \frac{2\pi \bar{\sigma}}{\lambda} - \bar{\sigma}\, cos \frac{2\pi \bar{\sigma}}{\lambda} \right)$$

$$y' = \Sigma \left(A\, sen \frac{2\pi t}{\tau} + B\, cos \frac{2\pi t}{\tau} \right) \frac{\lambda}{2\pi} \left(cos \frac{2\pi l}{\lambda} - cos \frac{2\pi \bar{\sigma}}{\lambda} \right)$$

Los valores de A y B se determinan por las condiciones iniciales que dan por ejemplo los valores de y' y $\frac{\partial y'}{\partial t}$ para todo valor de $\bar{\sigma}$ siendo $t = o$. Para ello basta desarrollar en series de Fourier, procedentes como el segundo miembro del valor de y', las funciones dadas que expresen analíticamente la forma inicial y estado inicial de velocidades.

Otro caso particular interesante es el de un cable que oscila á uno y otro lado, de modo que el punto medio se mueva en una horizontal. En este caso

θ' es función par de $\bar{\sigma}$, luego se tomará de la exponencial introducida antes, la parte real en $\bar{\sigma}$, á saber

$$\theta' = M\, e^{i\frac{2\pi}{\tau}t} \cos\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\sigma}$$

De 96 y 97 tomaremos asimismo la parte real, de modo que se convertirán en las siguientes:

$$l \operatorname{sen}\frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\pi}\cos\frac{2\pi l}{\lambda} = M'_1$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi l}{\lambda} = N'_1$$

Como y' ha de ser nulo para $\bar{\sigma} = o$, debe tomarse $N'_1 = o$, luego

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = n\pi$$

siendo n un entero cualquiera. Tal es la relación que fija los valores admisibles para λ y los períodos correspondientes. El valor de M'_1 viene definido por la primera de las ecuaciones de condición, de modo que la solución completa adoptará la forma

$$\theta' = \Sigma\left(A \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\tau}t + B\cos\frac{2\pi}{\tau}t\right)\cos\frac{2\pi}{\lambda}\bar{\sigma}$$

$$x' = \Sigma\left(A \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\tau}t + B\cos\frac{2\pi}{\tau}t\right)\frac{\lambda}{2\pi R}\left[\bar{\sigma}\operatorname{sen}\frac{2\pi\bar{\sigma}}{\lambda} - l\operatorname{sen}\frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi\bar{\sigma}}{\lambda} - \cos\frac{2\pi l}{\lambda}\right]\right]$$

$$y' = \Sigma\left(A \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\tau}t + B\cos\frac{2\pi}{\tau}t\right)\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi\bar{\sigma}}{\lambda}$$

Acerca de la determinación de A y B cabe decir lo mismo que antes.

En cualquiera de los casos que se consideren, si la perturbación es producida ó mantenida por una acción periódica, las perturbaciones tienen el mismo perío-

do. De coincidir el valor de éste con el de uno de los períodos propios del cable, tiene lugar resonancia.

Consideremos, por ejemplo, el caso de existir en los extremos fuerzas perturbadoras iguales y contrarias producidas por los esfuerzos motor y resistente en las poleas, los cuales supondremos periódicos y de modo que el corrimiento de los extremos sea de la forma:

$$Q\, e^{i\frac{2\pi}{\tau'}t}$$

El valor de x' habrá de cumplir con la condición en el extremo que resulta de expresar que tiene el valor anterior. Supongamos el caso de oscilaciones simétricas, el cual conviene desde luego á las condiciones límites, se tendrá:

$$M\, e^{i\frac{2\pi}{\tau'}t}\, \frac{\lambda}{2\pi R}\left[-\, l\cos\frac{2\pi l}{\lambda'} + \frac{\lambda}{2\pi}\, sen\, \frac{2\pi l}{\lambda'}\right] Q\, e^{i\frac{2\pi}{\tau'}t}$$

Por consiguiente, siendo λ' el valor que corresponde á τ' .

$$M = \frac{Q\,\frac{2\pi R}{\lambda'}}{-\, l\cos\frac{2\pi l}{\lambda'} + \frac{\lambda}{2\pi}\, sen\, \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

expresión que pone en evidencia lo dicho antes acerca de la resonancia

En su estudio acerca de los cables teledinámicos (*) introduce Léauté e lllamado por él coeficiente de regularidad, que define como el cociente entre el exceso de tensión producido por un movimiento relativo de los extremos del cable y este corrimiento. Para llegar á calcularlo, parte de una forma supuesta para θ' tomado en su valor medio, á saber de

$$\theta' = A + B\,\overline{\sigma}$$

siendo A y B funciones del tiempo. Es de observar que este valor de θ' no satis-

(*) Léauté Theorie generale des transmissions par câbles métalligues: Regles pratiques. Paris 1882.

face á la ecuación diferencial en θ'. Con este valor de θ' y las condiciones límites de ser nulos en ambos extremos los corrimientos, halla los valores de α y β definidos en la página (203). Con los valores de estas cantidades y de ecuaciones análogas á las 84, saca T' y $\frac{\partial T'}{\partial \bar{\sigma}}$. Como la solución atribuída á θ' no satisface á la ecuación diferencial, los valores de T' y $\frac{\partial T'}{\partial \bar{\sigma}}$ así hallados no pueden deducirse uno de otro. Le sirven, sin embargo, para calcular

$$\frac{1}{2l}\int_0^l T'\, d\bar{\sigma} \qquad y \qquad \frac{1}{2l}\int_0^l \frac{\partial T'}{\partial \bar{\sigma}}\, d\bar{\sigma}$$

con cuyos valores calcula luego T' por la fórmula

$$T' = \frac{1}{2l}\int_0^l T'\, d\sigma + \frac{\bar{\sigma}}{2l}\int_0^l \frac{\partial T'}{\partial \bar{\sigma}}\, d\bar{\sigma}$$

Este valor de T' aparece relacionado con los movimientos en los extremos, de modo que mediante el mismo se calcula fácilmente el coeficiente de regularidad. Según Léauté, es preciso que se halle comprendido entre ciertos límites para el buen funcionamiento de la transmisión de fuerza por cables teledinámicos. Al lector á quien interese referimos al trabajo original de Léauté.

XIV.—Oscilaciones de hilos en reposo

Las fórmulas generales han sido dadas ya en el capítulo XII. En el presente nos proponemos hacer algunas aplicaciones de las mismas á algunos casos particulares, en especial á la catenaria ordinaria, á la catenaria en forma de cicloide y últimamente nos ocuparemos del problema más primitivo en el estudio del movimiento de hilos flexibles é inelásticos: las oscilaciones de una cuerda vertical que pende de un punto, problema propuesto y resuelto por Daniel Bernonilli en las Actas de la Academia de San Petesburgo, en 1732.

Las ecuaciones generales de las perturbaciones de un hilo en reposo son las fórmulas 77, 78 y 79. Consideremos el caso de una catenaria en que la flecha sea del orden de las perturbaciones. Dentro de esta aproximación, la misma con

que se ha procedido en el capítulo anterior, las ecuaciones precedentes dan, conforme puede deducirse de las ecuaciones 82 y 94 bis

$$\zeta' = F_1(s + \sqrt{Rg}\,t) + F_2(s - \sqrt{Rg}\,t)$$

$$\theta' = F_3(s + \sqrt{Rg}\,t) + F_4(s - \sqrt{Rg}\,t)$$

La solución trigonométrica últimamente introducida impone entre λ y τ la relación siguiente

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{Rg}{\lambda^2}$$

Los valores de λ para el caso de oscilaciones simétricas son las raíces de

$$tg\,\frac{2\pi}{\lambda}\,l = \frac{2\pi l}{\lambda}$$

siendo $2l$ la longitud entre los puntos de apoyo. Los valores de θ' x' é y' adoptan formas iguales á las del capítulo anterior. Una cosa análoga puede deducirse del caso en que las vibraciones son á uno y otro lado de la posición de reposo.

En las fórmulas anteriores la perturbación se propaga á lo largo de la catenaria con la velocidad $\sqrt{Rg}$. Es fácil ver que en el caso de una catenaria cualquiera la velocidad de propagación es $\sqrt{\overline{\rho g \cos\theta}}$ (*). Tomemos al efecto las ecuaciones del movimiento perturbado.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \eta' \frac{\partial \theta'}{\partial s} \\
\frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \xi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\
\frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathfrak{X}\theta' \\
\frac{\partial \eta'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho\sigma}\left[T\frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' \frac{\partial \theta}{\partial s}\right] + \mathfrak{Y}\theta'
\end{aligned}\right\} 100$$

(*) Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper.

Supongamos una perturbación propagándose á lo largo de la catenaria, y sea v la velocidad de propagación. En los límites ó extremos de la perturbación, suponiendo que no se formen ángulos bruscos, son constantemente nulos ζ', η', T' y θ'. Expresando analíticamente lo que acabamos de decir, se tendrá

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + v \frac{\partial \eta'}{\partial s} = o$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + v \frac{\partial \theta'}{\partial s} = o$$

La última de las ecuaciones 100 aplicada á uno de los extremos de la perturbación en que como hemos dicho $\xi' = T' = \theta' = o$ será en virtud de la segunda de las 100 y las dos que acabamos de escribir

$$v^2 = \frac{T}{\rho \sigma}$$

ó bien recordando la segunda de las ecuaciones intrínsecas del equilibrio de una catenaria,

$$v = \sqrt{\frac{}{\rho g \cos \theta}}$$

como se quería demostrar.

En el excelente tratado de dinámica ya citado, se ocupa Routh en las oscilaciones de una catenaria en forma de cicloide. Siendo a el radio del círculo generador,

$$\overline{\rho} = 4a \cos \theta$$

y, según la pág. 98

$$\rho \sigma = \frac{T_o}{4 g a \cos^3 \theta}$$

Llevando estos valores á las ecuaciones 100, pueden escribirse las dos últimas, teniendo en cuenta las ecuaciones del equilibrio, como sigue:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{g}{T_o} \cos^2 \theta \frac{\partial T'}{\partial \theta} - g \cos \theta \, \theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} = g \cos \theta \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} + g \cos^2 \theta \, T' + g \operatorname{sen} \theta \, \theta'$$

Derivando la segunda respecto á θ y añadiendo al resultado la primera, se tendrá, teniendo presente el resultado de derivar la segunda de las ecuaciones 100 respecto á t,

$$\frac{4a}{g} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta^2} = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{T'}{T_o} \cos \theta \right) \qquad 101$$

Del mismo modo, derivando la primera respecto á θ y restando del resultado la segunda, teniende presente el resultado de derivar la primera de las 100 respecto á t,

$$2 T_o \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T' \cos \theta)$$

De esta última se deduce, siendo C y D funciones arbitrarias de t,

$$T' \cos \theta = T_o \left[2 \int \theta' \, d\theta + C\theta + D \right]$$

y llevado este valor á la 101, queda la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$\frac{4a}{g} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \theta_2} = 4\theta + 2C$$

Routh introduce la solución trigonométrica que conviene á los casos en que las oscilaciones son simétricas respecto de un eje medio vertical y al caso de oscilaciones á una y otra parte. En el primer caso, $C = o$. Aplica luego los resultados encontrados á la catenaria común, suponiendo la flecha de ésta suficientemente pequeña para que en la parte inferior pueda confundirse con una cicloide. Sus resultados coinciden enteramente con los que hemos obtenido más arriba al tratar la catenaria directamente. Routh expone además la solución de algunos otros problemas en que para leyes dadas de la fuerza exterior las ecuaciones del

movimiento perturbado conduzcan á ecuaciones lineales al hacer las eliminaciones. Résal, en su tratado de Mecánica, se ocupa también en las oscilaciones de la catenaria.

Para tratar el problema de D. Bernoulli, de las oscilaciones de una cadena ó cuerda vertical, observaremos que puede considerarse á ξ' como nula en todo instante, y que, en cambio,

$$\eta' = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad 0' = \frac{\partial \eta}{\partial s}$$

siendo η la distancia de un punto á la vertical de equilibrio. Tomando el origen de arcos s en el punto de suspensión, la última de las ecuaciones 100 dá

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho \sigma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = g \frac{\partial \eta}{\partial s}$$

Ahora bien, por la primera de las condiciones de equilibrio, en este caso particular la única,

$$T = g \int_s^l \rho \sigma \, ds + P$$

siendo l la longitud de la cadena y P un peso que cuelga, por ejemplo, en su extremo libre.

Suponiendo, en primer lugar, la cadena homogénea, $\rho \sigma = 1$, la ecuación diferencial última haciendo el cambio de variable definido por

$$\frac{T}{g} = x^2$$

se convierte en la siguiente

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Introduciendo la solución

$$\eta = y e^{i \frac{2\pi}{\tau} t}$$

la cantidad y supuesta sólo función de x debe satisfacer á la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + p^2 y = 0$$

siendo

$$p = \frac{2\pi}{\tau} g^{\frac{-1}{2}}$$

La solución de la ecuación diferencial anterior se expresa mediante las funciones J_0 é Y^0 de Bessel, de orden cero:

$$y = A J_0(p x) + B Y_0(p x) \qquad (102)$$

siendo A y B constantes arbitrarias.

Si el extremo libre no contiene peso ninguno, $P = 0$ y además T, y por consiguiente x, son nulos en el extremo inferior. Ahora bien, para $x = 0$ la función Y_0 se hace infinita como log x, luego la constante B ha de ser cero. Por otra parte, en el punto de suspensión $x = l$ en que la tensión es igual al peso total de la cadena, y es constantemente igual á cero. Luego.

$$J_0(p\sqrt{l}) = 0$$

Los valores de p que satisfagan á esta fórmula determinan los períodos τ de las vibraciones de la cuerda.

Las raíces de $J_0(u) = 0$ de valor numérico relativamente grande, pueden calcularse por la fórmula de Stokes

$$\frac{x_v}{\pi} = v - \frac{1}{4} + \frac{0{,}50661}{4v-1} - \frac{0{,}053041}{(4v-1)^3} + \frac{0{,}262051}{(4v-1)} -$$

Las primeras raíces son, sucesivamente, 2,4048; 5,5201; 8,6537; 11,7915; 14,9309; 18,0711, 21,2116; 24,3525; 27,4935; 30,6346; 33,7758; 36,9171; 40,0584, etcétera.

Si del extremo cuelga el peso P, la condición en este límite resultará de ex-

presar que la fuerza que obra sobre el peso es igual á la masa por su aceleración. Ahora bien, la componente vertical queda equilibrada por la tensión, y la componente horizontal que produce el movimiento es $-P\frac{\partial \eta}{\partial s}$ luego

$$\frac{P}{g}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -P\frac{\partial \eta}{\partial s}$$

Substituyendo la solución trigonométrica en t, resulta para el extremo, que responde á $x = \sqrt{\frac{P}{g}}$

$$p^2 y = \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Substituyendo la solución 102, se llega á la condición siguiente, recordando que $J_1 = -\frac{\partial J_o}{\partial x}$, $Y_1 = \frac{\partial Y_o}{\partial \alpha}$ y siendo J_1 é Y_1 las funciones de Bessel de orden 1.

$$A\left(p\sqrt{\frac{P}{g}}J_o\left(p\sqrt{\frac{P}{g}}\right) - 2 \quad J_1\left(p\sqrt{\frac{P}{g}}\right)\right) + \qquad (103)$$
$$B\left(p\sqrt{\frac{P}{g}}Y_o\left(p\sqrt{\frac{P}{g}}\right) - 2 \quad Y_1\left(p\sqrt{\frac{P}{g}}\right)\right) = o$$

la cual unida á la condición en el límite fijo en que $x = \sqrt{\frac{P}{g} + l}$ á saber:

$$A J_o\left[p\sqrt{\frac{P}{g} + l}\right] + B Y_o\left[p\sqrt{\frac{P}{g} + l}\right] = o \qquad 104$$

determinan por la eliminación de $\frac{A}{B}$ entre ellas, los valores de p que convienen al problema, y por lo tanto los períodos de las vibraciones. Si escribimos

$$p\sqrt{\frac{P}{g}} = z \quad , \qquad p\sqrt{\frac{P}{g} + l} = \lambda z$$

el resultado de eliminar $\frac{A}{B}$ entre 103 y 104 adopta la forma:

$$\frac{Y_o(\lambda z)}{J_o(\lambda z)} = \frac{z\,Y_o(z) - 2\,Y_1(z)}{z\,J_o(z) - 2\,J_1(z)}$$

Según un trabajo reciente de Airey (*), los valores relativamente grandes de z que satisfacen á esta ecuación pueden calucularse por la fórmula:

$$z = \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q-p}{\beta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\beta^5}$$

siendo en esta fórmula

$$\beta = \frac{\nu\pi}{\lambda - 1} \qquad (\nu \text{ un entero cualquiera})$$

$$p = \frac{15\lambda + 1}{8\lambda(\lambda 1)} \quad , \quad q = -\frac{135\lambda^3 + 25}{384\lambda^3(\lambda - 1)} \quad , \quad r = -\frac{7425\lambda^5 - 1073}{5120\lambda^5(\lambda - 1)}$$

Alrey determinó experimentalmente las vibraciones de una cadena de bicicleta, hallando conformidad completa en la teoría.

Para terminar, indicaremos que en la ya citada Dinámica de Routh se hallan tratados algunos casos en que la densidad de la cadena se supone variable. Cuando varía como la potencia enésima de la distancia al punto de suspensión, intervienen en la solución funciones de Bessel de orden de n. Este resultado es debido á Greenhill. En efecto, si en la última de las ecuaciones 100 se supone $\rho\sigma = ks^n$ y que el origen de s está en el punto libre, adoptará la forma

$$ks^n \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + g\,ks^n \frac{\partial \eta}{\partial s}$$

pero

$$T = g\,k\int s^n\,ds = \frac{g\,k\,s^{n+1}}{n+1}$$

luego, introduciendo ya la solución trigonométrica $\eta = y\,e^{i\frac{2\pi}{\tau}t}$, la cantidad y supuesta sólo función de s, debe satisfacer á la ecuación ordinaria siguiente en que se ha hecho el cambio de variable $s = x^2$:

(*) Oscillations of Chains Phylosophical Magazine, 1911.

$$q^2 y + \frac{1}{x}(2n + 1)\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} = o$$

siendo

$$q = \frac{4\pi}{\tau}\sqrt{\frac{n+1}{g}}$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria últimamente escrita, teniendo en cuenta que el extremo que cuelga se halla libre, es:

$$\mu = A\, x^{-\frac{n}{2}} J_n(q\,x)$$

La condición en el extremo fijo impone la condición de ser

$$J_n(q\sqrt{l}) = o$$

Las raíces de valor relativamente grande de $J^n(z) = o$ en que n puede ser fraccionario ó entero, vienen dadas por (*)

$$x_\nu = a - \frac{m-1}{8a} - \frac{4(m-1)(7m-31)}{3(8a)^3} - \frac{32(m-1)(83m^2-982m+3779)}{15(8a)^5} + -$$

siendo

$$a = \frac{\pi}{4}(2n - 1 + 4\nu), \quad m = 4n^2$$

(*) V. por ejemplo Yahnke-Emde Funktionentafeln Leipzig, 1909.

FIN DEL TOMO PRIMERO

ÍNDICE

DEL EQUILIBRIO DE LOS HÍLOS INELÁSTICOS

PÁGS.

I.—Introducción. 1

II.—Planteo de las ecuaciones de equilibrio en la forma ordinaria 1

III.—Forma intrinseca de las ecuaciones de equilibrio. 4

IV.—Propiedades que se deducen de las ecuaciones de equilibrio 5

V.—Integración de las ecuaciones del equilibrio 6

VI.—Ecuaciones de equilibrio de un hilo dispuesto en una superficie lisa. Forma ordinaria. 9

VII.—Ecuaciones de equilibrio de un hilo en una superficie lisa. Forma intrínseca . . . 11

VIII.—Hilo dispuesto sobre una curva dada. Teorema de Bonnet 13

IX.—Ecuaciones de equilibrio de un hilo en una superficie rugosa 15

X.—Forma canónica de las ecuaciones del equilibrio de un hilo. 17

XI.—De como un hilo en equilibrio realiza la extremal de una cierta integral definida. . 22

XII.—Cuerda de saltar. 28

XIII.—Catenaria esférica 35

XIV.—Hilo pesado sobre superficie esférica animado de un movimiento de rotación con velocidad angular ω alrededor de su diámetro vertical 41

XV.—Catenarias dispuestas sobre superficies desarrollables. 50

XVI.—Geodésicas del catenoide y la pseudo esfera de Beltrami 52

XVII.—Catenarias electrodinámicas 60

XVIII.—Catenarias planas 63

XIX.—Analogías entre el equilibrio de un hilo y el movimiento de un punto. 115

DEL MOVIMIENTO DE LOS HILOS INELÁSTICOS

I.—Forma ordinaria de las ecuaciones del movimiento 117

II.—Forma intrinseca de las ecuaciones del movimiento 118

III.—Caso de estar el hilo en una superficie 127

IV.—Forma canónica de las ecuaciones del movimiento 129

V.—Integrales. 133

VI.—Distribución de tensiones impulsivas y movimiento inicial que sigue á una perturbación. 135

VII.—Del movimiento estacionario de un hilo 139

PAGS.

VIII.—Del movimiento estacionario de un hilo cuando los ejes de referencia giran alrededor del eje de las z con velocidad angular w constante 141

IX.—Caso particular en que la velocidad de deslizamiento es constante. 148

IX.—Movimiento estacionario respecto de un sistema de ejes que se trasladan 160

X.—Movimiento estacionario referido á ejes fijos. Aplicación á las transmisiones de fuerza por cables. 168

XI.—Movimiento estacionario de un hilo en una superficie 177

XII.—Oscilaciones de un hilo Ecuaciones generales 187

XIII.—Oscilaciones de los cables en las transmisiones teledinámicas 198

XIV.—Oscilaciones de hilos en reposo 214

AS
302
B36
época 3
t.9
no.1

Academia de Ciencias y Artes
de Barcelona
Memorias

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY